

Motteffekt an Elementarteilchen und Kernen mit elektromagnetischer Struktur

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

von

ARMIN HERMANN

= 1964

München 1963



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555224_0040

Motteffekt an Elementarteilchen und Kernen
mit elektromagnetischer Struktur.

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München.

vorgelegt von
Armin Hermann

München, im September 1963



- 1.Referent: Prof. Dr. Fritz Bopp
- 2.Referent: Prof. Dr. Arnulf Schlüter
- 3.Referent: Dr. Hans-Joachim Meister

Tag der mündlichen Prüfung: 22.Januar 1964

Herrn Professor Dr. Friedrich Klemm
zum 60. Geburtstag am 22. Januar 1964
verehrungsvoll gewidmet

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	Seite 3
Zusammenfassung	6
1. Kapitel. Der Motteffekt	
1. Formulierung des Asymmetrieeffektes	9
2. Ausnutzung von Symmetrien	11
3. Der Effekt in der niedrigsten Näherung	17
2. Kapitel. Herleitung der beitragenden Matrixelemente	
1. Die erste Methode: Direkte Integration	19
2. Die allgemeine Methode: Unitarität der S-Matrix	25
3. Kapitel. Das Konzept einer elektromagnetischen Struktur	
1. Die Struktur in der 2.Bornschen Näherung	30
2. Rechnerische Behandlung der Struktur	34
4. Kapitel. Abbildung der Symmetrien auf die Permutationsgruppe	
1. Ableitung der Transformationsgruppe	40
2. Die Asymmetriefunktionen	44
3. Die Darstellung der Struktur	53
5. Kapitel. Berechnung der Streuung am Spin-0-Target.	
1. Streuung eines Diracteilchens	59
2. Streuung eines Fermions mit anomalem Moment	69
6. Kapitel. Berechnung der Streuung am Spin-1/2-Target	
1. Streuung eines Diracteilchens	74
2. Vergleich mit der Streuung am Spin-0-Target	76
3. Die Elektron-Proton-Streuung	86
Anhang A. Streuung am äußeren Feld	
1. Die Matrixelemente	95
2. Die Asymmetriegröße	97
Anhang B. Die Meßbarkeit der Mottasymmetrie	101
Anhang C. Auswertung der Ergebnisse	104
Literaturverzeichnis	106

Einleitung.

Durch die Messung der Wirkungsquerschnitte der elastischen Streuung von hochenergetischen Elektronen an Protonen und Atomkernen (Hofstadter-Experimente) erhält man wichtige Aufschlüsse über die elektromagnetische Struktur der Targetteilchen. Seit den letzten Jahren diskutiert man auch Polarisierungseffekte, aus denen zusätzliche Informationen über die Struktur gewonnen werden können. Unter diesen Polarisierungseffekten besitzt der altbekannte Motteffekt Eigenschaften, die ihn vom theoretischen Standpunkt besonders interessant und vom Experiment her relativ leicht zugänglich erscheinen lassen.

Bei der Streuung von unpolarisierten Elektronenstrahlen an unpolarisierten Targets tritt eine Polarisation des Elektronenstrahles senkrecht zur Streuebene auf. Die Voraussetzung eines unpolarisierten Targets ist wesentlich, denn bekanntlich gibt es dann keinen Effekt in der niedrigsten elektrodynamischen Näherung: Der Motteffekt tritt also erst in der 2. Bornschen Näherung auf.

Besitzt man transversal polarisierte Elektronenstrahlen, so führt bei der Streuung an beliebigen Targets der Motteffekt zu einer Asymmetrie des Wirkungsquerschnittes. Hat man nur unpolarisierte Elektronenstrahlen zur Verfügung, ist der Effekt durch ein Doppelstreuexperiment meßbar. Auf diese Weise wurde der Motteffekt zum ersten Mal 1942 durch Shull, Chase und Meyers nachgewiesen. Hier wird durch die erste Streuung eine partielle Polarisation erreicht, die sich bei der zweiten Streuung in einer Asymmetrie des Wirkungsquerschnittes bemerkbar macht, vollständig analog zum Versuch von Malus mit zweimaliger Lichtreflexion oder von Barkla mit Röntgenstrahlen. Die Doppelstreuung liefert also sozusagen den quadratischen Effekt.

Da im allgemeinen der Motteffekt mit zunehmender Primärenergie immer mehr abnimmt, wird also beim Übergang zu höheren Energien sowohl die Erzeugung möglichst vollständig (transversal) polarisierter Elektronenstrahlen als auch die Entwicklung von Detektoren für sehr kleine Polarisationsgrade wesentlich. Besonders die von H. Friedmann (Friedmann 1961) entwickelte Technik, die Elektronen eines im Stern-

Gerlach-Feldes polarisierten Atomstrahles durch Photoeffekt zu extrahieren, führt zu monoenergetischen Strahlen hoher Intensität und Polarisation. ($I \sim 10^{-8}$ A, $P > 0,8$). Ebenso entwickelte W. Raith (Raith 1963) kürzlich einen empfindlichen Detektor für die Spinpolarisation mit einer oberen Nachweisgrenze von $4 \cdot 10^{-3}$ für einen Energiebereich um 100 keV.

Im Augenblick arbeitet man daran, die Nachweismethoden auf den Hochenergiebereich auszudehnen. Die maximale kinetische Energie, bei der bisher die Asymmetrie gemessen wurde, liegt, soweit uns bekannt ist, bei 250 MeV (Buon 1963). Ebenso wichtig wie der Nachweis ist die Erzeugung von polarisierten Elektronenstrahlen. H. Friedmann (Friedmann 1961) hat abgeschätzt, daß im Linearbeschleuniger eine ursprüngliche Polarisation durch den Beschleunigungsvorgang nicht zerstört wird. Für das Synchrotron sind zwei Depolarisation bewirkende Effekte berechnet und im wesentlichen als ungefährlich erkannt worden. Es handelt sich um die Streuung an Restgasatomen (Ernst 1963) und die Spin-Flip-Strahlung (Storek 1963).

Zusammenfassung.

Bei der geschilderten Sachlage schien es interessant, den Motteffekt für elektromagnetische Wechselwirkung und hohe Energien zu betrachten. Auch in dem Fall rein punktförmiger Teilchen liegen brauchbare Formeln bisher nur für die e-e- und e- μ -Streuung vor (Barut u. Fronsda1 1960, Fronsda1 u. Jakšić 1961). In der vorliegenden Arbeit führen wir für verschiedene einfallende Teilchen und verschiedene Targetteilchen (Spin Null, Spin $\frac{1}{2}$ und Spin $\frac{1}{2}$ mit Berücksichtigung eines anomalen Momentes) die Berechnung der Mottasymmetrie im Rahmen der Bornschen Näherung der Quantenelektrodynamik (Zweitteilchenstreuung) durch.

Unser Augenmerk richten wir dabei von Anfang an besonders auf den Einfluß einer "Struktur" der an der Streuung beteiligten Teilchen. Dieser Einfluß scheint deswegen interessant, weil der Motteffekt erst durch Mitwirkung des Matrixelementes der 2. Bornschen Näherung (Zwei-Photonen-Austausch) zustande kommt: Beim augenblicklichen Stand der Theorie kann man von einer Struktur der Nukleonen nur sinnvoll in der 1. Bornschen Näherung sprechen (vergl. Kapitel 3). Das ist in höchstem Maß unbefriedigend, weil der Begriff einer "Struktur" unabhängig von dem Schema der Reihenentwicklung sein sollte. (Es mag natürlich sein, daß später einmal dieses Konzept aufgegeben werden muß.) Jedenfalls wird man als nächsten Schritt versuchen wollen, die "Struktur" in die 2. Bornsche Näherung einzuführen.

Es ist dabei sicher sehr schwierig, wenn nicht überhaupt unmöglich, durch Messung des Wirkungsquerschnittes die nach der Theorie unbestimmt bleibenden Strukturfunktionen¹⁾ experimentell festzulegen, denn die 2. Ordnung liefert nur eine kleine Korrektur zum Wirkungsquerschnitt. Der Motteffekt aber tritt überhaupt erst in der 2. Ordnung auf und ist deshalb direkt - nicht erst nach einem undurchsichtigen Subtraktionsverfahren - meßbar. Dazu kommt wesentlich (Kapitel 2), daß zu diesem Effekt nur ein bestimmter Anteil des Matrixelementes 2. Ordnung be trägt, der physikalisch eine einfache Bedeutung hat, nämlich einem reellen Zwischenzustand entspricht. Es ist ein Grundgedanke dieser Arbeit, daß damit die von der 1. Bornschen Näherung her bekannten Strukturfunktionen in der 2. Ordnung eingesetzt werden können. In

¹⁾ Es gibt sehr wahrscheinlich wesentlich mehr als in der niedrigsten Bornschen Näherung.

einer gewissen Annäherung (vergl. Kapitel 3) hat man so die Struktur in der 2.Bornschen Näherung erfaßt. Im Ergebnis verbleiben Integrationen über die Strukturfunktionen, die für die von Hofstadter angegebene analytische Form geschlossen ausintegriert werden können. Es zeigt sich, daß auf diese Weise keinerlei Divergenzen auftreten. Da man ebenso (endliche oder unendliche) Summen solcher Ausdrücke geschlossen ausintegrieren kann, ist damit die geschlossene Darstellung des Motteffektes für alle physikalisch sinnvollen Strukturfunktionen sichergestellt (vergl. Kapitel 3).

Da die Hofstadterschen Strukturfunktionen (Clementel-Villi-Ladungsverteilung) der üblichen pauschalen Berücksichtigung der Abschirmung des Atomkernes durch die Hüllenelektronen entsprechen, können unsere Ergebnisse auch unmittelbar auf das leichter experimentell zugängliche Gebiet der Streuung von keV-Elektronen angewendet werden. Durch die Behandlung dieses Streuvorganges als einer Zweiteilchenstreuung gehen wir auch hier über die bisherige, in der Literatur bekannte Behandlung hinaus; die übliche Partialwellenmethode ist eine Näherung für unendlich schwere Kerne. (Zu beachten haben wir allerdings, daß nach niederen Energien und hohen Kernladungszahlen hin die Gültigkeit der Bornschen Näherung begrenzt ist.)

Da wir in dieser Arbeit nur elektromagnetische Kräfte betrachten, haben wir neben der Lorentz-Invarianz auch Invarianz gegenüber den diskreten Transformationen P, C und T. Diese Eigenschaft der Wechselwirkung führt unter der Voraussetzung des Verschwindens der Matrixelemente für Spinumklapp zu einer bemerkenswert weitgehenden Aussage: Nur ganz bestimmte "Asymmetriefunktionen" können die Winkelabhängigkeit der Mottasymmetrie angeben. (In dieser Arbeit maximal vier.) Diese Asymmetriefunktionen haben wir im 4. Kapitel durch allgemeine gruppentheoretische Betrachtung gefunden. In diesen Funktionen (zusammen mit einem einfachen "Strukturfaktor") steckt auch die gesamte Strukturabhängigkeit der Mottasymmetrie.

Für Spin-0-Targets ist ein Verbot von Spinumklappungen einfach eine Folge der P-Invarianz; diese Voraussetzung bedeutet also hier keine Einschränkung. Bei einem Spin-1/2-Target können wir bei der Auswertung der Spur die vom Spin-Umklapp herrührenden Glieder durch ihr abweichendes Transformationsverhalten einfach identifizieren.

Die Mottasymmetrie bei der Streuung eines Diracteilchens an einem Spin-0-Target wird durch eine einzige "Asymmetriefunktion" wiedergegeben. Für diese Funktion weisen wir nach, daß sie für anwachsende Energie monoton abnimmt, wenn die Struktur in einer Wolke einheitlichen Vorzeichens besteht. Damit haben wir in diesem Fall den Satz, daß sich die Ausdehnung grundsätzlich in einer Verkleinerung des Effektes bemerkbar macht.

Die Durchführung der Rechnung im 5. Kapitel führt uns auf die für beliebige Struktur geltende Mottasymmetrie bei der Streuung an Spin-0-Targets. Physikalisch beschreiben wir damit die Streuung von Elektronen und μ -Mesonen an Atomkernen von Spin 0, an π - und K-Mesonen (Abb. 13 und 14). Es zeigt sich für beliebig hohe Energien (und punktförmige Teilchen) ein bisher noch nicht bekanntes Maximum der gleichbleibenden Höhe $\frac{1}{2} Z\alpha$, das also für große Kernladungen Z durchaus nicht klein ist.

Für die Streuung an Spin-1/2-Targets finden wir im Abschnitt 6.1 ebenso die für beliebige Struktur geltende Mottasymmetrie (Abb. 17-20). Wir haben damit die Streuung von Elektronen an μ -Mesonen erfaßt; ein Vergleich mit den (noch nicht vorliegenden) Experimenten würde auch hier einen Schluß auf die etwaige Struktur von Elektronen und μ -Mesonen erlauben.

Das Zustandekommen eines Motteffektes haben wir uns in zwei grundsätzlich verschiedenen Mechanismen zu veranschaulichen. Das durch die relative Bewegung zwischen Elektron und Atomkern am Ort des Elektrons entstehende Biot-Savartsche Magnetfeld verschiebt je nach Spinstellung das Elektron zusätzlich nach links oder rechts und führt zu einer einseitigen "Anreicherung". Zu dieser Bahnbeeinflussung treten noch zusätzliche Drehungen des Spins (Spinumklappungen) im Fall von Spin-1/2-Targets, bei denen die beiden Mechanismen in Konkurrenz stehen. Im Abschnitt 6.2 zeigen wir, daß für Schwerpunktimpulse $p < 1,116 M_2$ (M_2 Masse des Targetteilchens) auch für Spin-1/2-Target der Mechanismus der Spin-Bahn-Kopplung für das Vorzeichen verantwortlich ist. Für $p > 1,116 M_2$ beginnt sich der Einfluß der Spin-Spin-Wechselwirkung in einer Vorzeichenumkehr bei hohen Streuwinkeln bemerkbar zu machen. Für etwa $p > 3 M_2$ überwiegt weitaus die Spin-Spin-Wechselwirkung, die dann praktisch für alle Winkel das Vorzeichen bestimmt.

Die Mitberücksichtigung eines anomalen Momentes des streuenden

Teilchens im Kap. 5.2 ermöglicht die Beschreibung der Streuung eines Protons am Atomkern; wegen der sehr hohen Targetmasse spielt dabei bis zu sehr hohen Einfallsenergien der Spin des Targetkerns praktisch keine Rolle. Allerdings liefert unsere Rechnung in diesem Fall nicht den Gesamteffekt, sondern nur den elektromagnetischen Anteil, der aber, da er nicht in jedem Fall klein ist, auch für sich genommen interessant sein mag (Abb. 15).

Im abschließenden Abschnitt 6.3 diskutieren wir die Elektron-Proton-Streuung (Abb. 21 - 23). Für hohe Energien (etwa ab einem Schwerpunktsimpuls von $p = 500$ MeV) verschwindet bekanntlich der Einfluß des anomalen Momentes; in diesem Bereich können wir das Proton als Dirac-Teilchen behandeln. Es zeigt sich, daß die Protonenpolarisation etwa um einen Faktor $\frac{M_p}{m_e} = 1836$ größer ist als die Elektronenpolarisation. Um auch eine für kleinere Impulse gültige Formel zu haben, haben wir das anomale Moment des Protons näherungsweise mitberücksichtigt und werden zu einer für kleine Impulse bis etwa $p = 100$ MeV gültigen Formel für die Elektronenpolarisation geführt.

Auf der elektronischen Rechenanlage IBM 7090 haben wir für die wesentlichen in dieser Arbeit aufgestellten Formeln die Mottasymmetrie auch mit Berücksichtigung einer Struktur numerisch ausgewertet; dazu geben wir weitere, den Streuvorgang charakterisierende Daten wie Wirkungsquerschnitt, Streuwinkel und Streuenergien an. Die umfangreichen Tabellen bilden einen nicht zum Druck bestimmten Anhang zu dieser Arbeit.

Trotz bemerkenswerter Ausnahmen ist doch der Motteffekt für hohe Energien sehr klein und in der Größenordnung von $A = \frac{m_e}{p} Z \alpha$. Wir diskutieren deshalb im Anhang B die Meßbarkeit, die - was uns sehr wesentlich erscheint - wohl auch bei sehr kleiner Asymmetrie gewährleistet ist, da der Effekt praktisch in einer Differenzmessung zugänglich ist.

1. Kapitel. Der Motteffekt.

1.1 Formulierung des Asymmetrieeffektes.

Bei der Streuung eines Elektronenstrahles ¹⁾ an unpolarisierten Targets tritt eine Rechts-Links-Asymmetrie in zweierlei Weise auf:

- 1) Der anfangs unpolarisierte Elektronenstrahl trägt nach der Streuung eine Polarisierung; diese steht senkrecht zur Streuebene und hat für Streuung um den Winkel $-\vartheta$ den gleichen Betrag, aber die umgekehrte Richtung wie bei der Streuung um ϑ (Mottpolarisation). ²⁾
- 2) Der Wirkungsquerschnitt hängt dann und nur dann von der Anfangspolarisation ab, wenn diese eine Komponente senkrecht zur Streuebene besitzt. Die Differenz zwischen zwei (senkrecht zur Streuebene) entgegengesetzt zueinander polarisierten Elektronenstrahlen hat bei den Streuwinkeln ϑ und $-\vartheta$ denselben Betrag aber das umgekehrte Vorzeichen (Mottasymmetrie). ²⁾

Die beiden Effekte wollen wir nun mathematisch formulieren und dabei ihre Eigenschaften (von denen wir eben schon einige genannt haben) und ihren inneren Zusammenhang aufzeigen. Da wir die Rechnung für beliebige Targets durchführen wollen, bedienen wir uns einer symbolischen Schreibweise.

Mottpolarisation: Für die Dichtematrix nach der Streuung eines unpolarisierten Strahles gilt (Meister 1961 a, b)

$$(1.1) \quad \tilde{\zeta}' = P(k) M(k, p) \frac{1}{2} P(p) \overline{M}(k, p) P(k)$$

(Dabei werden die Viererimpulse der beiden an der Streuung beteiligten Teilchen vor und nach der Streuung durch p und k symbolisiert; hat man zwischen Teilchen 1 und 2 deutlich zu unterscheiden, schreiben wir beispielsweise für die Anfangsimpulse genauer p_1 und p_2 . $M(k, p)$ ist das Matricelement der Streuung, $P(p)$ ist ein Projektionsoperator, der auf die Teilchenzustände projiziert.)

¹⁾ Wir betrachten auch μ -Mesonen und Protonen, zur Erleichterung der Bezeichnungsweise wollen wir aber allgemein den Begriff "Elektron" gegenüber dem schwerfälligen "Spin-1/2-Teilchen" bevorzugen.

²⁾ Abweichend von unserem Sprachgebrauch nennt Meister (Meister 1962) alle Polarisierungseffekte "Motteffekt", auch die, die durch eine Polarisierung des Targets zustandekommen.

Die Polarisierung nach der Streuung ist allgemein gegeben durch (Meister 1961 a, b)

$$(1.2) \quad \zeta^{\mu} = \frac{1}{\text{sp} \tilde{\zeta}'} \text{sp} \left[\frac{2W^{\mu}(k)}{m} \tilde{\zeta}' \right] = \frac{\tau^{\mu}(k,p)}{a(k,p)}$$

Dabei ist

$$(1.3) \quad \tau^{\mu}(k,p) = \text{sp} [P(k) \gamma^5 \gamma^{\mu} P(k) M(k,p) P(p) \bar{M}(k,p)]$$

$$(1.4) \quad a(k,p) = \text{sp} [P(k) M(k,p) P(p) \bar{M}(k,p)]$$

Mottasymmetrie: Für den Wirkungsquerschnitt gilt bis auf kinematische Faktoren

$$(1.5) \quad \text{sp} \mathcal{S}' = \text{sp} [P(k) M(k,p) \mathcal{S}(\zeta, p) \bar{M}(k,p) P(k)]$$

Setzt man die Dichtematrix

$$(1.6) \quad \mathcal{S}(\zeta, p) = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5 \hat{\zeta}) P(p) \quad , \quad \hat{\zeta} = \gamma_{\mu} \zeta^{\mu}$$

in (1.5) ein, folgt

$$(1.7) \quad 2 \text{sp} \mathcal{S}' = a(k,p) + a^{\mu}(k,p) \zeta_{\mu}$$

$$(1.8) \quad a^{\mu}(k,p) = \text{sp} [P(k) M(k,p) P(p) \gamma^5 \gamma^{\mu} P(p) \bar{M}(k,p)]$$

Der Wirkungsquerschnitt besteht aus einem von der Anfangspolarisation des gestreuten Elektronenstrahles unabhängigen Anteil $a(k,p)$ und aus einem davon abhängigen Anteil $a^{\mu}(k,p)$.

Die Mottasymmetrie ist definiert als Verhältnis von Differenz und Summe der Wirkungsquerschnitte zweier entgegengesetzt zueinander total polarisierter Elektronenstrahlen:

$$(1.9a) \quad A^{\mu}(k,p) \zeta_{\mu} = \frac{\mathcal{S}_+ - \mathcal{S}_-}{\mathcal{S}_+ + \mathcal{S}_-} = \frac{a^{\mu}(k,p) \zeta_{\mu}}{a(k,p)}$$

$$(1.9) \quad A^{\mu}(k,p) = \frac{a^{\mu}(k,p)}{a(k,p)}$$

Die oben gegebenen Formulierungen (3), (4); (8), (9) sind für die konkrete Rechnung sehr geeignet, weil zur Auswertung von Spuren von γ -Matrizen ein ausgefeiltes Rechenschema zur Verfügung steht. Für die im nächsten Abschnitt auszuführenden Beweise ist es günstig, die Größen

$$(1.10a) \quad N_{\eta'\eta}(k, p) = \bar{u}_{\eta'}(k) M(k, p) u_{\eta}(p)$$

$$(1.10b) \quad N_{\eta'\eta}^*(k, p) = \bar{u}_{\eta}(p) \bar{M}(k, p) u_{\eta'}(k)$$

einzuführen, die für feste Werte von η, η' Skalare sind; in Abhängigkeit von η und η' mag man sie als Matrizen im Polarisationsraum ansprechen. (η und η' sind jeweils zweier Werte fähig, + 1 und - 1). Wieder meinen wir die Schreibweise (10a) und (10b) symbolisch. Für den Fall, daß das Target nicht den Spin Null, sondern den Spin 1/2 besitzt, wäre genauer zu schreiben

$$(1.11) \quad N_{\eta'_1 \eta'_2; \eta_1 \eta_2}(k_1, k_2; p_1, p_2) = \\ = \bar{u}_{\eta'_1 \eta'_2}(k_1, k_2) M(k_1, k_2; p_1, p_2) u_{\eta_1 \eta_2}(p_1, p_2)$$

$U, \bar{U}$ sind dann Überspinoren und M eine Übermatrix, die im Spinorraum des Zweiteilchensystems wirken. So ist etwa

$$(1.11a) \quad u_{\eta_1 \eta_2}(p_1, p_2) = u_{\eta_1}(p_1) \otimes u_{\eta_2}(p_2)$$

$$(1.11b) \quad M(k_1, k_2; p_1, p_2) = M^{(1)}(k_1, p_1) \otimes M^{(2)}(k_2, p_2)$$

1.2 Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften der Wechselwirkung.

Da der von uns betrachtete Effekt durch elektromagnetische Wechselwirkung zustandekommt, liegt Invarianz nicht nur gegen die 10-parametrische Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen

vor, sondern auch gegenüber den diskreten Symmetrieeoperationen Paritätstransformation P, Zeitumkehr T und Ladungskonjugation C. Stören könnte höchstens eine schwache Wechselwirkung, die aber, wenn sie vorhanden sein sollte, um einen Faktor $(\frac{e}{g_s})^2 \sim 10^{-12}$ kleiner als die elektromagnetische Wechselwirkung und deshalb vernachlässigbar ist.

Die im folgenden benutzten Symmetrietransformationen wollen wir zunächst kurz notieren. Es folgt aus dem Matricelement (Meister 1961 b, Merkel 1962)

$$(1.12) \quad N_{\eta'\eta}(k, p) = \bar{u}_{\eta'}(\vec{k}) M(k^0, \vec{k}; p^0, \vec{p}) u_{\eta}(\vec{p})$$

durch P-Transformation

$$(1.13) \quad N_{\eta'\eta}^P(k, p) = \bar{u}_{\eta'}(-\vec{k}) M(k^0, -\vec{k}; p^0, -\vec{p}) u_{\eta}(-\vec{p}) = N_{\eta'\eta}(k^0, \vec{k}, p^0, \vec{p})$$

durch T-Transformation

$$(1.14) \quad N_{\eta'\eta}^T(k, p) = \bar{u}_{\eta'}(-\vec{p}) M(p^0, -\vec{p}; k^0, -\vec{k}) u_{\eta}(-\vec{k}) = N_{\eta'\eta}(p^0, \vec{p}, k^0, \vec{k})$$

durch PT-Transformation

$$(1.15) \quad N_{\eta'\eta}^{PT}(k, p) = \bar{u}_{\eta'}(\vec{p}) M(p^0, \vec{p}; k^0, \vec{k}) u_{\eta}(\vec{k}) = N_{\eta'\eta}(p^0, \vec{p}, k^0, \vec{k})$$

und durch TC-Transformation

$$(1.16) \quad N_{\eta'\eta}^{TC}(k, p) = \bar{v}_{\eta'}(-\vec{k}) M(-k^0, \vec{k}; -p^0, \vec{p}) v_{\eta}(-\vec{p}) = N_{\eta'\eta}(-k^0, \vec{k}, -p^0, \vec{p})$$

Wenn wir Symmetrie gegen obige Transformationen voraussetzen, haben wir Gleichheit von (12) und (13), (14) usw.

Eine weitere grundlegend wichtige Relation erhalten wir aus der Invarianz gegenüber Raumdrehungen. Zur Ableitung erscheint eine anschauliche Argumentation (im Schwerpunktsystem) einfacher und durchsichtiger als eine rechnerische Herleitung. Wir beziehen dabei (durch-

gänglich in dieser Arbeit) die Spinindizes auf die physikalisch ausgezeichnete Richtung senkrecht zur Streuebene; diese Richtung nehmen wir als raumfest an.

Durch eine Drehung um die Richtung $\vec{p}$ des Einfallsimpulses um den Winkel π erhalten wir, da sich hierbei der Spin wie ein Vektor transformiert (vergl. Abb. 1)

$$(1.17) \quad N_{\eta'\eta}(k, p) \rightarrow N_{-\eta'\eta}(\tilde{k}, p)$$

Abb.1 Der Streuvorgang vor und nach einer Raumdrehung um die Einfallrichtung mit dem Betrag 180° .

$N_{\eta'\eta}(\tilde{k}, p)$ ist aber gleich $N_{\eta'\eta}(p, k)$, denn dieses Matrixelement geht aus jenem durch Drehung um den Streuwinkel ϑ (Achse senkrecht zur Streuebene) hervor.

$$N_{-\eta'\eta}(\tilde{k}, p) \rightarrow N_{-\eta'\eta}(p, k)$$

Abb.2 Abermalige Raumdrehung, hier um eine Achse senkrecht zur Zeichenebene um den Betrag des Streuwinkels.

Also erhält man unter der Voraussetzung der Invarianz der Raumdrehung

$$(1.18) \quad N_{\eta'\eta}(k, p) = N_{-\eta'\eta}(p, k)$$

Aus der PT-Invarianz zusammen mit der Drehsymmetrie folgt

$$(1.19) \quad N_{\eta'\eta}(k, p) = N_{\eta\eta'}(p, k)$$

Diese Aussage ist für $\eta = \eta'$ trivial, aber für $\eta \neq \eta'$ gilt:

$$(1.20) \quad N_{+1}(k, p) = N_{-1}(k, p)$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Spinumklapp nach oben ist gleich der Wahrscheinlichkeit für einen Spinumklapp nach unten.

Man sieht sofort, daß eine Umklappung des Elektronenspins bei einer elastischen Streuung am spinlosen Target überhaupt nicht möglich ist (Faissner 1959). Spinumklapp von + 1 nach - 1 bedeutet eine Änderung des Gesamtdrehimpulses um $-\hbar$; zur Kompensation muß sich der Bahndrehimpuls um $\hbar$ ändern, was aber den Übergang in einen Zustand entgegengesetzter Parität bedeuten würde. Das ist wegen der P-Invarianz der Wechselwirkung unmöglich.

Aus den abgeleiteten Symmetrien ziehen wir nun Schlüsse auf die Eigenschaften des Motteffektes. Die Größe $a(k, p)$ bleibt, wie wir sehen werden, als echter Skalar gegenüber allen Transformationen invariant; das Verhalten der Mottpolarisation η^μ ist also dasselbe wie das von $r^\mu(k, p)$, das Verhalten der Mottasymmetrie $A^\mu(k, p)$ dasselbe wie $a^\mu(k, p)$.

Folgerungen aus der P-Invarianz: Aus (3), (4) bzw. (8) folgt mit (13) unter Berücksichtigung des Transformationsverhaltens von $\bar{u} \gamma^5 \gamma^\mu u$ (Meister 1961 b)

$$(1.21) \quad r^\mu(k_0, \vec{k}; p_0, \vec{p}) = g^{\mu\mu} r^\mu(k_0, -\vec{k}; p_0, -\vec{p})$$

$$(1.22) \quad a^\mu(k_0, \vec{k}; p_0, \vec{p}) = g^{\mu\mu} a^\mu(k_0, -\vec{k}; p_0, -\vec{p})$$

$$(1.23) \quad a(k_0, \vec{k}; p_0, \vec{p}) = a(k_0, -\vec{k}; p_0, -\vec{p})$$

(Wir verwenden die Metrik $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{00} = 1$.)

Da die Projektionen auf $\vec{p}$ und $\vec{k}$, $\vec{r} \cdot \vec{p}$ und $\vec{r} \cdot \vec{k}$ bei Raumspiegelungen ihr Vorzeichen wechseln, kann $\vec{r}$ (und $\vec{a}$) wegen der vorausgesetzten P-Invarianz nur eine Komponente senkrecht zur Streuebene besitzen: Die Mottpolarisation ist senkrecht zur Streuebene gerichtet.

Die ausgezeichnete Richtung senkrecht zur Streuebene wollen wir im folgenden immer die y-Richtung (Komponente a_y oder r_y) nennen. Die Mottpolarisation besitzt auch keine nullte Komponente, wie man sofort aus $\vec{r} \cdot \vec{k} = 0$ und $\vec{r} \cdot \vec{k} = 0$ schließt. Dasselbe gilt für die Mottasymmetrie. Damit folgt aus (21) und (22) der Satz: Mottasymmetrie und Mottpolarisation behalten bei einer Paritätsoperation ihr Vorzeichen.

Führen wir jetzt die Größen (10) ein, so lassen sich unsere beiden Asymmetriegrößen $a_y(k, p)$ und $r_y(k, p)$ und $a(k, p)$ auch schreiben

$$(1.24) \quad a(k, p) = \sum_{\eta\eta'} N_{\eta'\eta}(k, p) \cdot N_{\eta'\eta}^*$$

$$(1.25) \quad a_y(k, p) = \sum_{\eta\eta'} \eta N_{\eta'\eta}(k, p) N_{\eta'\eta}^*$$

$$(1.26) \quad r_y(k, p) = \sum_{\eta\eta'} \eta' N_{\eta'\eta}(k, p) \cdot N_{\eta'\eta}^*$$

Diese Beziehungen folgen aus (3), (4) und (8), wenn man $P(k) = \sum u_\eta(k) \bar{u}_\eta(k)$ und (10) einsetzt und übergeht zu

$$a^\mu(k, p) t_\mu = a_y$$

$$r^\mu(k, p) t_\mu = r_y \quad \text{mit} \quad t^\mu = \{0, 0, 1, 0\}$$

Die Schreibweise (25) und (26) ist nichts anderes als die Darstellung der Mottasymmetrie als Spur über Matrizen des Polarisationsraumes. (Hamilton 1959, Tolhoek 1951).

Folgerungen aus der PT-Invarianz: Aus (25) und (26) ergibt sich mit (15)

$$(1.27) \quad r_y(k, p) = - a_y(p, k)$$

$$(1.28) \quad a(k, p) = a(p, k)$$

Aus der PT-Invarianz ergibt sich also eine Kopplung der Mottpolarisation mit der Mottasymmetrie der reziproken Reaktion. (Die "reziproke Reaktion" geht aus der ursprünglichen durch Vertauschung von Anfangs- und Endzustand hervor).

Folgerung aus der Drehsymmetrie: Analog ergibt sich mit (18)

$$(1.29) \quad a_y(k, p) = -a_y(p, k)$$

$$(1.30) \quad r_y(k, p) = -r_y(p, k)$$

$$(1.31) \quad a(k, p) = a(p, k)$$

Aus der PT-Invarianz zusammen mit der Drehsymmetrie folgt

$$(1.32) \quad a_y(k, p) = r_y(k, p)$$

die Gleichheit von Mottasymmetrie und Mottpolarisation, die demnach (vergl. (20)) durch die Gleichheit der Matrixelemente $N_{1-1}(k, p) = N_{-11}(k, p)$ für Spinklapp oben-unten und unten-oben zustandekommt (Faissner 1959).

Bei den üblichen Doppelstreuexperimenten, wo der anfangs unpolarisierte Elektronenstrahl durch eine erste Streuung (Streuwinkel ϑ_1) eine Mottpolarisation erhält, die dann bei der zweiten Streuung (Streuwinkel ϑ_2) zu einer Asymmetrie des Wirkungsquerschnittes führt, mißt man den quadratischen Effekt: Die Asymmetrie des Wirkungsquerschnittes nach der zweiten Streuung ist mit (32), wenn beide Streuebene zusammenfallen

$$(1.33) \quad A_D = A(\vartheta_1) \cdot A(\vartheta_2)$$

Die Streuwinkel ϑ_1 und ϑ_2 sind vertauschbar.

Da die Vertauschung von $\vec{p}$ und $\vec{k}$ im Schwerpunktsystem gerade den Übergang von ϑ zu $-\vartheta$ bedeutet, erkennt man aus (29) und (30), daß Mottpolarisation und Mottasymmetrie beim Übergang von $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ ihr Vorzeichen wechseln: Es können nur antisymmetrische Funktionen von ϑ im Ergebnis auftauchen. Es folgt weiter, daß das Integral über die Polarisation nach der Streuung, erstreckt über den ganzen Raumwinkel, verschwindet: Die Gesamtpolarisation (eines nach Voraussetzung vor der

Streuung unpolarisierten Elektronenstrahles) nach der Streuung ist Null. Diese Aussage bedeutet (zunächst bei der Streuung an einem Spin-0-Target betrachtet) nichts anderes, als daß die maximale Entropie des Elektronenstrahles vor der Streuung (regellose Spinstellung) maximal bleibt. Betrachtet man die Streuung an einem Target mit Spin $1/2$, so bleiben die einzelnen Gesamtpolarisationen $\{r_y^{(1)}(k,p)d\Omega_k$ und $\{r_y^{(2)}(k,p)d\Omega_k$ nach der Streuung Null: Von einem System maximaler Unordnung kann auf ein anderes System maximaler Unordnung keine Ordnung übertragen werden.

1.3 Der Effekt in der niedrigsten Bornschen Näherung.

Aus der Unitarität des Streuoperators leitet man leicht ab (vergl. Kap. 2.2), daß in der 1. Bornschen Näherung S schiefhermitesch ist:

$$(1.34) \quad S_1^T = -S_1$$

$$(1.35) \quad \bar{M}_1(k,p) = -M_1(p,k)$$

$$(1.36) \quad N_{1\eta\eta'}^*(k,p) = -N_{1\eta\eta}(p,k)$$

Mit diesen Matrixelementen folgt aus (24) und (25) oder aus (4) und (8)

$$(1.37) \quad a_y(k,p) = r_y(p,k)$$

$$(1.38) \quad a(k,p) = a(p,k)$$

Aus der Relation (37) zusammen mit der aus der PT-Invarianz abgeleiteten Relation (27) lassen sich sofort wesentliche Schlüsse ziehen:

- 1.) In der 1. Bornschen Näherung gibt es keinen Motteffekt.
- 2.) Entwickelt man in den Ausdrücken der Mottasymmetrie (4) bzw. (8) die Matrixelemente $M(k,p)$ und $\bar{M}(k,p)$ nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten α , so rührt der Beitrag niedrigster Ordnung von einer Kombination (einer Art Interferenzterm) von $M_1(k,p)$ mit dem hermiteschen Anteil von $M_2(k,p)$ her.

Das Auftreten nur des hermiteschen Anteils des Matrixelementes zweiter Ordnung für die niedrigste Näherung des Motteffektes ist für die rechnerische Auswertung und die Struktur des Effektes von ausschlaggebender Bedeutung. Die niedrigste Ordnung in $a_y(k,p)$ ist von **dritter** Potenz in α , die Mottasymmetrie $A_y(k,p) = \frac{a_y(k,p)}{a(k,p)}$ selbst ist damit von der Ordnung α .

Nach (8) ist die Asymmetrie in der niedrigsten Ordnung gegeben durch

$$(1.39) \quad a_y(k,p) = \int p [P(k) M_1(k,p) P(p) \gamma^5 \gamma^2 P(p) \text{Herm } \bar{M}_2(k,p)] \\ + \int p [P(k) \text{Herm } M_2(k,p) P(p) \gamma^5 \gamma^2 P(p) \bar{M}_1(k,p)]$$

Aufgrund der PT-Invarianz sind beide Summanden von (39) einander gleich, so daß gilt

$$(1.40) \quad a_y(k,p) = - 2 \int p [\gamma^5 \gamma^2 P(p) M_1(p,k) P(k) \text{Herm } M_2(k,p) P(p)]$$

(Den Beweis für den Übergang von (39) nach (40) werden wir in Kap. 4.1 nachtragen.)

Der ungefähre Gültigkeitsbereich von (40) kann am Entwicklungsparameter der Bornschen Näherung $\frac{Z\alpha}{\beta}$ abgelesen werden. Für hohe Energien $\beta \rightarrow 1$ wird eine Gültigkeitsgrenze durch die Ordnungszahl Z des Targets gegeben: Bei schweren Kernen ist $Z\alpha$ nicht mehr klein gegen 1 (etwa bei Gold $Z = 79$ ist $Z\alpha \approx 0,578$). Eine Beschränkung im Energiebereich nach unten wird durch β im Nenner des Entwicklungsparameters gegeben. Ein Vergleich mit der Partialwellenmethode zeigt, daß man als untere Schranke je nach Ordnungszahl 1 keV bis 100 keV annehmen kann.

2. Kapitel. Herleitung der beitragenden Matricelemente.

Mit (1.39) bzw. (1.40) haben wir (unter Voraussetzung der für nicht-schwache Wechselwirkung erfüllten PT-Invarianz) gezeigt, daß in niedrigster Bornscher Näherung zum Motteffekt nur eine Art Interferenzterm zwischen dem Matricelement erster Ordnung und dem hermiteschen Anteil des Matricelementes zweiter Ordnung beiträgt. In diesem Kapitel wollen wir die beitragenden Matricelemente explizite herleiten, insbesondere die spezielle physikalische Bedeutung des hermiteschen Anteils des Matricelementes zweiter Ordnung angeben.

2.1 Die erste Methode : Direkte Integration.

Wir gehen vom allgemeinen Matricelement der 2. Bornschen Näherung aus, das wir nach den Feynmanregeln im Impulsraum sofort hinschreiben können. Die Anzahl der inneren Linien entspricht hier der Anzahl der Ecken; an jeder Ecke haben wir eine δ^4 -Funktion anzusetzen, ebenso bedeutet jede innere Linie eine Energie-Impuls-Integration. Da eine δ^4 -Funktion (die die Erhaltung der Gesamtenergie und des Gesamtimpulses ausdrückt) stehen bleibt, bleibt ebenso eine Integration $\int d^4q$ übrig. Anders als beim Matricelement der 1. Bornschen Näherung ist also in der zweiten Ordnung noch eine Integration über eine innere Linie zu leisten. Wir setzen in dieser Arbeit immer voraus, daß die gestreuten Teilchen und die Targetteilchen nicht identisch sind und auch nicht im Teilchen-Antiteilchen-Verhältnis zueinander stehen.

Von allen Matricelementen der 2. Ordnung können nur die Graphen des Zweiphotonenaustausches einen hermiteschen Anteil besitzen (Singer 1954, Tsai 1960, Barut 1960). Für ein Spin-1/2-Target kommen also nur die Matricelemente (a) und (b) von Abb. 3 in Frage, die wir im folgenden allein behandeln wollen. Aus der Betrachtung wird sich ergeben, daß die anderen Strahlungskorrekturen zum Motteffekt in der niedrigsten Ordnung nicht beitragen können.

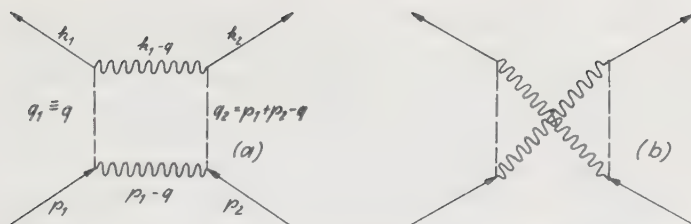


Abb.3 Graphen des Zweiphotonenaustausches. Nur (a) trägt zum Mott-effekt bei.

Für beide Matrixelemente gilt bis auf die Vertauschung der Summationsindizes μ und ν und bis auf einen verschiedenen Nenner N - ohne Berücksichtigung von reellen Faktoren, die symmetrisch in p und k sind-

$$(2.1) \quad N_2(k, p) \simeq \int \frac{d^4 q}{N} [\bar{u}(k_1) \gamma^\mu (i\hat{q}_1 - m_1) \gamma^\nu u(p_1)] \cdot [\bar{u}(k_2) \gamma_\mu (i\hat{q}_2 - M_2) \gamma_\nu u(p_2)]$$

Das Integral und die durch die inneren Linien auftretenden Faktoren im Nenner haben wir durch $\int d^4 q$ bzw. $1/N$ angedeutet. Aus (1) folgt durch Übergang zum konjugiert Komplexen

$$(2.2) \quad N_2^*(k, p) \simeq \left(\frac{d^4 q}{N} \right)^* [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu (i\hat{q}_1 - m_1) \gamma^\mu u(k_1)] \cdot [\bar{u}(p_2) \gamma_\nu (i\hat{q}_2 - M_2) \gamma_\mu u(k_2)] \\ = N_2(p, k)$$

wenn das Integral reell ist. Der allein zu unserem gesuchten Asymmetrieeffekt beitragende, reelle Anteil von $N_2(k, p)$ wird also durch den Realteil des Integrals

$$(2.3) \quad \Im = \frac{\int d^4 q^{(1)} d^4 q^{(2)} d^4 q^{(3)} d^4 q^{(4)}}{[q^2 + m_1^2 - i\varepsilon][p_1^2 + p_2^2 - q^2 + M_2^2 - i\varepsilon][(p_1 - q)^2 - i\varepsilon][(k_2 - q)^2 - i\varepsilon]}$$

geliefert. Den Nenner in (3) haben wir dabei so notiert, wie er sich aus Graph a ergibt.

Ähnliches gilt auch für ein Spin-0-Target. Neben den Matrixele-

menten, die den (a) und (b) analogen Graphen entsprechen (hier sind lediglich die Fermionenlinien auf der einen Seite durch Mesonenlinien zu ersetzen) tritt noch zusätzlich das Matrixelement (c) von Abb. 4 auf. Wieder erhalten wir den reellen Anteil des Matrixelementes als Realteil eines Integrals. Dieses Integral ist ein ähnlicher Ausdruck wie (3), es fehlt aber hier der 2. Faktor im Nenner, der der inneren Linie des 2. Teilchens entspricht.

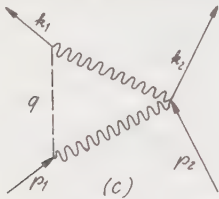


Abb. 4 Graph des Zweiphotonen-austausches, der nur bei Spin-0-Targets auftritt.

Wir wollen nun beweisen, daß der zum Effekt allein beitragende reelle Anteil des Integrals (3) genau von dem reellen Zwischenzustand (bestehend aus einem reellen Elektron und einem reellen Targetteilchen) herrührt.

Wir suchen den Realteil des Integrals (3) und integrieren zunächst über dq^0 und dann in der üblichen Weise über $|\vec{q}| d|\vec{q}|$. Wir gehen dazu ins Schwerpunktsystem, wo die Betrachtungen besonders bequem werden. Der Nenner ist vom Grad 8 in q^0 , es sind deshalb acht Pole in der komplexen q^0 -Ebene vorhanden, von denen vier oberhalb, vier unterhalb der reellen q^0 -Achse liegen. Aus der Tatsache, daß der Nenner vom Grad 8 ist, folgt weiter, daß das Integral über einen Halbkreis mit unendlich großem Radius (mag er nun oberhalb oder unterhalb der reellen Achse liegen) keinen Beitrag leistet.

Voraussetzung a: Die vier Pole oberhalb der reellen Achse liegen alle an verschiedenen Stellen. Dann ist das Integral $\oint d\vec{q}$ gleich der Summe der Residuen an diesen vier Polen. Die Residuen sind aber für $\xi \rightarrow 0$ reell; also ist das Integral $2\pi i \sum \text{Res}$ rein imaginär. Wenn nun die weitere Integration $\int |\vec{q}|^2 d|\vec{q}|$ vollzogen wird, so ist der Integrand rein imaginär (der Nenner ist rein reell, Faktor $2\pi i$ im Zähler). Ein Beitrag zum Realteil des Integrals (3) kann also nur von eventuellen

Polen auf der reellen Achse der komplexen $|\vec{q}|$ -Ebene herrühren.

Wann treten solche Pole auf? Einen solchen Pol kann es nur geben, wenn ein Faktor des Nenners eine Nullstelle hat. An das ursprüngliche Integral $\int dq^0 |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| d\Omega_q$ gedacht, heißt das aber, daß zwei Nullstellen zusammenfallen. Beispiel: Betrachten wir das Residuum der q^0 -Integration, das von der Nullstelle des ersten Faktors im Nenner von (3) herrührt:

$$(2.4) \quad -q^{0^2} + \vec{q}^2 + m_1^2 - i\varepsilon = 0; \quad q^0 = \pm \sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2 - i\varepsilon}$$

Wir erhalten eine Nullstelle bei der $|\vec{q}|$ -Integration, wenn mit der Nebenbedingung (4) gilt:

$$(2.5) \quad (p_1 + p_2 - q)^2 + M_2^2 - i\varepsilon = - (p_1^0 + p_2^0 - q^0)^2 + \vec{q}^2 + M_2^2 - i\varepsilon = 0$$

Es muß also gleichzeitig (2.4) und

$$(2.6) \quad q^0 = p_1^0 + p_2^0 \pm \sqrt{\vec{q}^2 + M_2^2 - i\varepsilon}$$

sein, d.h. aber, bereits in der q^0 -Ebene müssen zwei Pole zusammenfallen, was nach Voraussetzung nicht der Fall sein soll: Im Falle getrennter Pole in der q^0 -Ebene gibt es keinen Beitrag zum gesuchten Realteil des Matricelementes.

Voraussetzung b: Es tritt ein Zusammenfallen von Polen in der q^0 -Ebene ein. Ein Pol in der q^0 -Ebene bedeutet, daß die zugehörige innere Linie auf dem Massenhypersboloid liegt, also einem reellen Teilchen entspricht.

Zwei benachbarte Linien können nicht gleichzeitig auf dem Massenhypersboloid liegen, d.h. gleichzeitig einem reellen Teilchen entsprechen. Das würde nämlich dem Vorgange entsprechen, daß ein Elektron (oder Proton) spontan ein γ -Quant emittiert, was aus Energie-Impulsgründen unmöglich ist. Daraus folgt unmittelbar, daß nicht mehr als zwei Linien

reellen Teilchen entsprechen können, denn bei drei Linien gibt es immer zwei benachbarte. Es kommen also für reelle Linien nur zwei gegenüberliegende in Betracht.

Voraussetzung c: Bei zusammenfallenden Polen, wobei beide dasselbe Vorzeichen des Imaginärteils haben - konfluenten Polen 1. Art - können wir für den Integranden von (3) schreiben:

$$(2.7) \quad \frac{f(q^0)}{(q^0 - a - i\varepsilon)^2}$$

$f(q^0)$ ist nach Voraussetzung in der Umgebung von $q^0 = a + i\varepsilon$ regulär. Dann entwickeln wir $f(q^0)$ an dieser Stelle, und aus (7) folgt:

$$(2.8) \quad \frac{f(q^0)}{(q^0 - a - i\varepsilon)^2} = \frac{f(a+i\varepsilon)}{(q^0 - a - i\varepsilon)^2} + \frac{f'(a+i\varepsilon)}{(q^0 - a - i\varepsilon)} + \dots$$

Das Residuum ist also $f'(a+i\varepsilon)$, d.h. in diesem Fall erhalten wir wieder nur einen Beitrag zum Imaginärteil, wir suchen aber gerade die reellen Anteile.

Voraussetzung d: Bei zusammenfallenden Polen, wobei die Pole verschiedenes Vorzeichen des Imaginärteils haben - konfluenten Polen 2. Art - kommen nach den Ausführungen unter der Voraussetzung b nur die beiden Möglichkeiten in Betracht, daß die beiden Photonenlinien oder die beiden Fermionenlinien die zusammenfallenden Pole liefern, d.h. reellen Teilchen entsprechen.

Annahme: Die beiden Photonenlinien liegen zugleich auf dem Massenhypersphäroid.

$$(2.9) \quad (p_1 - q)^2 - i\varepsilon = 0 \quad ; \quad (k_1 - q)^2 - i\varepsilon = 0$$

$$(2.10) \quad p_1^0 - q^0 = \pm \sqrt{(\vec{p}_1 - \vec{q})^2 - i\varepsilon}$$

$$(2.10a) \quad k_1^0 - q^0 = \pm \sqrt{(\vec{k}_1 - \vec{q})^2 - i\varepsilon}$$

Verschiedenes Vorzeichen des Imaginärteils bedingt verschiedenes Vorzeichen von $(p_1^0 - q^0)$ und $(k_1^0 - q^0)$. Im Schwerpunktsystem ist aber $p_1^0 = k_1^0 = -E_1$, und wir sind damit auf einen Widerspruch geführt: Wenn beide Photonenlinien auf der Massenschale liegen, können wir niemals einen reellen Anteil des Matrixelementes erhalten.

Es müssen die beiden inneren Linien, die zu den Impulsen $\vec{q}$ und $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{q}$ gehören, gemeinsam auf der Massenschale liegen. Die Pole liegen also bei

$$(2.12) \quad q^0 = \pm \sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2 - i\epsilon} \quad ; \quad q^0 - p_1^0 - p_2^0 = \pm \sqrt{\vec{q}^2 + M_2^2 - i\epsilon}$$

Verschiedenes Vorzeichen des Imaginärteils bedingt verschiedenes Vorzeichen der rechten Ausdrücke; also haben die Ausdrücke q^0 und $p_1^0 + p_2^0 - q^0$ gleiches Vorzeichen.

Die Annahme q^0 positiv führt auf einen Widerspruch: Weil $p_1^0 + p_2^0 = -E_1 - E_2 < 0$ und damit auch $(p_1^0 + p_2^0 - q^0) < 0$, haben wir entgegen der Voraussetzung verschiedenes Vorzeichen. Also ist $q^0 < 0$; die Pole liegen bei

$$(2.13) \quad q^0 = - \sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2 - i\epsilon}$$

$$(2.13a) \quad q^0 = -E_1 - E_2 + \sqrt{\vec{q}^2 + M_2^2 - i\epsilon}$$

Gleichsetzen der rechten Seiten liefert

$$(2.14) \quad - \sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2} = -E_1 - E_2 + \sqrt{\vec{q}^2 + M_2^2}$$

Die Lösung ist

$$(2.15) \quad |\vec{q}| = |\vec{p}_1| \quad (= |\vec{k}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{k}_2|)$$

die einem reellen Elektron und einem reellen Targetteilchen im Zwischenzustand entspricht. Da wir uns im Schwerpunktsystem befinden, sind die Impulsbeträge aller (inneren und äußeren) Teilchen gleich. (Dafür schreiben wir dann i.a. p.)

Wir haben damit gezeigt, daß zum Realteil des Integrales (3), d.h. aber zum reellen Anteil des Matrixelementes der zweiten Ordnung, nur der reelle Zwischenzustand von Elektron und Targetteilchen beiträgt.¹⁾ Aus der Herleitung folgt unmittelbar, daß der zusätzliche Graph bei der Streuung an Spin-0-Targets, der nur zu einem Nenner von drei quadratischen Ausdrücken führt (Abb.4), keinen hermiteschen Anteil haben kann. Hier fehlt gerade der Ausdruck $(p_1 + p_2 - q)^2 + m_2^2 - i\varepsilon$ im Nenner, dessen gleichzeitiges Verschwinden mit $q^2 + m_1^2 - i\varepsilon$ den gesuchten Anteil liefert. Entsprechend erkennt man, daß der Graph (b) von Abb. 3 keinen hermiteschen Anteil besitzt.

Nach der soeben skizzierten Methode kann man auch das Integral (3) auswerten. Wir wissen nun, daß die beiden Faktoren im Nenner, die von den inneren Photonenlinien herrühren, bei der Integration $\int d^4q$ und $\int |\vec{q}|^2 d|\vec{q}|$ keine Rolle spielen, d.h. man kann sie nachträglich berücksichtigen, indem man für q^0 den speziellen Wert am konfluenten Pol 2. Art einsetzt. So berechnen wir

$$(2.16) \quad \text{Re} \int \frac{1}{[q^2 + m_1^2 - i\varepsilon][(p_1 + p_2 - q)^2 - i\varepsilon]} = - \frac{(2\pi)^4 p}{8|\vec{E}_1 + \vec{E}_2|} \int dQ_q$$

Damit können wir den zum Motteffekt beitragenden hermiteschen Anteil des Matrixelementes zweiter Ordnung unmittelbar aus dem allgemeinen Matrixelement ableiten.

2.2 Die allgemeine Methode: Unitarität der S - Matrix.

Wir entwickeln den Streuoperator nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten α

¹⁾ P. Singer hat in einer umfassenden Arbeit (P. Singer 1954) ganz allgemein bewiesen, daß von allen Matrixelementen bis zur Ordnung α^2 nur der Graph (a) von Abb. 3 einen reellen Anteil besitzt. Er hat weiter bewiesen, daß dieser reelle Anteil gerade von konfluenten Polen 2. Art herrührt, die physikalisch einem reellen Zwischenzustand entsprechen.

$$(2.17) \quad S = 1 + S_1 + S_2 + \dots$$

und erhalten aus

$$(2.18) \quad S^\dagger S = S S^\dagger = 1$$

durch Vergleich der Glieder erster Ordnung unmittelbar

$$(2.19) \quad S_1^\dagger = - S_1$$

Die S-Matrix ist in der 1. Bornschen Näherung schiefhermitesch. Im Impulsraum stellt sich diese Relation mit

$$(2.20) \quad (\psi_f, S_1 \psi_i) = S^\dagger (\sum k_e - \sum p_e) N_1(k_i, p)$$

dar als

$$(2.21) \quad N_{1\eta\eta'}^*(k_i, p) = - N_{1\eta'\eta}(p, k)$$

Ebenso liefert der Vergleich der Glieder zweiter Ordnung, wenn man wieder (17) in (18) einsetzt

$$(2.22) \quad S_2 + S_2^\dagger = - S_1 S_1^\dagger = - S_1^\dagger S_1 = S_1 S_1$$

Da der Ausdruck auf der linken Seite gerade das Doppelte des hermiteschen Anteils des Streuoperators zweiter Ordnung ist, gilt

$$(2.23) \quad \text{Herm } S_2 = - \frac{1}{2} S_1 S_1^\dagger = - \frac{1}{2} S_1^\dagger S_1 = \frac{1}{2} S_1 S_1$$

Wenn wir wieder, um auf die übliche Definition des Matrixelementes zu kommen, die $S^\dagger$ -Funktion abspalten, die die Erhaltung von Gesamtenergie und Gesamtimpuls angibt, erhalten wir bei der Darstellung dieser Relation im Impulsraum:

$$(2.24) \quad S^\dagger (\sum k_e - \sum p_e) \text{Re } N_2(k_i, p) = \frac{1}{2} (\psi_f, S_1 S_1 \psi_i) = \\ = \frac{1}{2} (\psi_f, S_1 \psi_{zw}) (\psi_{zw}, S_1 \psi_i)$$

Hier haben wir ein vollständiges System von (natürlich reellen) Zwischenzuständen einzuschleiben. Nun vermittelt der Operator S_1 den Übergang von einem Zustand mit einem Elektron und einem Targetteilchen in einen ebensolchen, d.h. das Matrixelement $(\psi_f, S_1 \psi_{zw})$ ist nur dann von Null verschieden, wenn auch der Zwischenzustand wieder aus einem (reellen) Elektron und einem (reellen) Targetteilchen besteht.

Damit haben wir den im vorigen Abschnitt speziell an den in unserer Arbeit auftretenden Matrixelementen bewiesenen Satz allgemein gezeigt: Der reelle Anteil des Matrixelementes zweiter Ordnung rührt physikalisch vom Auftreten eines reellen Zwischenzustandes her.

Aus (24) folgt unter Berücksichtigung von (20)

$$(2.25) \quad \begin{aligned} & \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \operatorname{Re} N_{2\eta\eta'}(k, p) = \\ & = \frac{1}{2} \int d^3q_1 \int d^3q_2 \sum_{\eta''} \delta^4(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) N_{1\eta\eta''}(k, q) N_{1\eta''\eta'}(q, p) \end{aligned}$$

Integration über q_2 liefert $\vec{q}_2 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{q}_1$ und damit

$$(2.26) \quad \operatorname{Re} N_{2\eta\eta'}(k, p) = \frac{1}{2} \int d^3q \delta(k_1^0 + k_2^0 - q_1^0 - q_2^0) \sum_{\eta''} N_{1\eta\eta''}(k, q) N_{1\eta''\eta'}(q, p)$$

Die noch vorhandene δ -Funktion $\delta(E_f - E_{zw})$ führt dazu, daß auch noch die Integration über den Impulsbetrag ausführbar ist. So erhalten wir schließlich

$$(2.27) \quad \operatorname{Re} N_{2\eta\eta'}(k, p) = \frac{E_1 E_2 p}{2 |E_1 + E_2|} \int dQ q \sum_{\eta''} N_{1\eta\eta''}(k, q) N_{1\eta''\eta'}(q, p)$$

Da $\sum_{\eta''} u_{\eta''}(q) \bar{u}_{\eta''}(q) = P(q)$ läßt sich für die ungeränderten Matrixelemente schreiben

$$(2.28) \quad \operatorname{Re} M_2(k, p) = \frac{E_1 E_2 p}{2 |E_1 + E_2|} \int dQ q M_1(k, q) P(q) M_1(q, p)$$

Nun können wir (28) unmittelbar in den Ausdruck für die Mott-

asymmetrie (1.40) einführen, die damit als Spur allein über Matrixelemente erster Ordnung ausgedrückt ist:

$$(2.29) \quad a_y(k, p) = - \frac{E_1 E_2 p}{|E_1 + E_2|} \int d\Omega_q \gamma \left[\gamma^5 \gamma^2 P(p) M_1(p, k) P(k) M_1(k, q) P(q) M_1(q, p) \right]$$

(Im Falle der Streuung am statischen Feld gilt ebenfalls (29); man hat nur den Übergang $E_2 \rightarrow \infty$ vorzunehmen. Vergl. Anhang A)

Der Einfachheit halber werden wir in dieser Arbeit immer von (29) ausgehen; die Methode der direkten Integration des Matrixelementes 2.Ordnung, also (16) mit (1.40), verwenden wir als Rechenkontrolle. Die Auswertung von (29), die wir in den Kapiteln 5 und 6 vornehmen werden, vollziehen wir dabei in der schon durch die Formeln zum Ausdruck gebrachten Weise: Wir bilden die Spur in (29) und führen anschließend die Winkelintegration durch. Damit erledigen wir also von der ursprünglichen Integration d^4q einen Teil vor, den anderen Teil nach der Auswertung der Spur.

Im folgenden haben wir noch die Matrixelemente der 1. Bornschen Näherung zu notieren:

a) Streuung an einem Spin-0-Target.

$$(2.30) \quad N_1(k, p) = \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{m_1}{E_1} \frac{1}{2E_2} \left[\bar{u}(k_1) \gamma^\mu u(p_1) \right] (k_2 + p_2)_\mu \frac{1}{(k_1 - p_1)^2}$$

Wählt man $\mu = 0$, so fällt man auf das Matrixelement für die Streuung an einem statischen Potential (vergl. Anhang A) zurück. Die übrigen Terme $\mu = 1, 2, 3$ bilden also die dynamische Korrektur zur Potentialstreuung. Den gleichen Übergang von (30) nach (A. 5) erhalten wir mit dem Grenzübergang Targetmasse $M_2 \approx E_2 \rightarrow \infty$. Ein anomales Moment und eine Struktur des einfallenden "Elektrons" kann man durch die übliche Substitution

$$(2.31) \quad \gamma^\mu \rightarrow \Gamma^\mu = F_1(Q^2) \gamma^\mu + \frac{ik}{2m_1} F_2(Q^2) \hat{Q} \gamma^\mu$$

berücksichtigen (man vergl. Kap.3). Eine Struktur des Targets kann ebenso berücksichtigt werden durch die Substitution

$$(2.32) \quad \frac{1}{Q^2} \longrightarrow \frac{F(Q^2)}{Q^2}$$

Die Struktur des Targets macht sich in derselben Weise geltend wie die Ladungsstruktur $F_1(Q^2)$ des einfallenden Elektrons.

b) Streuung am Spin-1/2-Target.

$$(2.33) \quad N_1(k, p) = -i \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{m_1 M_2}{E_1 E_2} [\bar{u}(k_1) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(p_2)] \frac{1}{(k_1 - p_1)^2}$$

Die Berücksichtigung einer Struktur (entweder des Targetteilchens oder des einfallenden Diraceteilchens) erfolgt wieder analog (21).

Man überzeugt sich leicht, daß die allgemeine Relation (21) speziell auch bei (30) und (33) erfüllt ist.

3. Kapitel. Das Konzept einer elektromagnetischen Struktur.

3.1 Die Struktur in der 2. Bornschen Näherung.

In dieser Arbeit behandeln wir den Motteffekt für die Streuung eines Elektronenstrahles an verschiedenen Targetteilchen. Unsere Ansätze für die elektromagnetische Wechselwirkung sind zunächst die üblichen, die punktförmigen Teilchen entsprechen. Die bekannten Streuexperimente mit hochenergetischen Elektronen (Hofstadter 1960, 1961) haben aber gezeigt, daß mit einer solchen Annahme die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Atomkernen, besonders Protonen, bei hohen Energien nicht mehr beschrieben werden kann. Es mag sein, daß dieses Verhalten mit dem "Zusammenbrechen der Quantenelektrodynamik bei kleinen Abständen" zusammenhängt, in der üblichen Erklärung, der wir uns hier anschließen werden, spricht man jedenfalls von einer "Struktur".

Um die Struktur der Nukleonen (und Atomkerne) zu bestimmen, vergleicht man die experimentellen Wirkungsquerschnitte mit den gerechneten Werten der 1. Bornschen Näherung. Für diese 1. Bornsche Näherung weiß man aus Invarianzbetrachtungen, daß sich eine Struktur nur in zwei reellen "Parametern", den sogenannten Strukturfunktionen $F_1(q^2)$ und $F_2(q^2)$ bemerkbar machen kann (Foldy 1952, Salzman 1955), die vom Betrag des Vierervektors des Energie-Impulsübertrages des Streuprozesses abhängen und experimentell bestimmt werden. Bis jetzt hat man q^2 -Werte bis 36 f^{-2} erreicht.

Beim gegenwärtigen Stand kann man also in Theorie und Experiment von einer "Struktur" nur sinnvoll in der ersten elektromagnetischen Näherung sprechen, während doch der Begriff einer "Struktur" unabhängig sein sollte von der Nummer der Näherung. (Sonst wäre eine "Struktur" eher ein formal-mathematisches, als physikalisches Konzept.) Man wird also in einem nächsten Schritt prüfen wollen, ob in der zweiten elektrodynamischen Näherung die Vorstellungen und Begriffe, die man sich in der 1. Bornschen Näherung gebildet hat, noch zutreffend sind.

Man kann einwenden, daß es zwar eine Struktur der Nukleonen und natürlich auch eine Theorie geben müsse, die diese Struktur beschreibt, daß diese Struktur sich aber nicht notwendigerweise in das Schema der

Strukturfunktionen der 1. Bornschen Näherung hier in die zweite Ordnung unmittelbar zu übertragen und man hat - bis auf eine gleich zu schildernde Einschränkung - die Struktur in der zweiten Näherung berücksichtigt. Es ist nämlich keineswegs so, daß im Falle des Mott-effektes einfach nur die Struktur der 1. Bornschen Näherung gelten würde und man folglich nichts prinzipiell Neues gewinnen könnte: Bei unserem Vorgehen hat man die Struktur nicht streng, sondern nur in einer gewissen Annäherung berücksichtigt.



Abb. 5 Bei stark-wechselwirkenden Teilchen können Resonanzen (b) neben dem üblichen Matrixelement (a) auftreten.

Es ist noch nicht der Fall behandelt, daß durch starke Wechselwirkung das reelle Proton im Zwischenzustand virtuell in mehrere Teilchen übergeht (Abb. 5 b). Den Gültigkeitsbereich unserer Näherung kann man durch Vergleich mit dem Comptoneffekt am Proton abschätzen. Infolge der Integration über die beim Motteffekt auftretenden virtuellen Photonenlinien wird wahrscheinlich die dortige Resonanz bei 300 MeV nicht auftreten und das Ergebnis bis 1 GeV gültig bleiben (Drell und Fubini 1959).

Das wird durch folgende Überlegung plausibel: Die elektrodynamische Struktur des Nukleons kann anschaulich so interpretiert werden, daß die Ladung in positiv und negativ elektrischen Wolken (und wahrscheinlich noch einem δ -artigen "harten Kern") mit dem gleichen Ladungsschwerpunkt verteilt ist. Bei der Streuung von γ -Quanten ist nun eine Polarisierung möglich, d.h. die Ladungsschwerpunkte der Wolken verschieben sich gegeneinander. Im Partikelbild heißt das aber, daß virtuelle Mesonen entstehen.

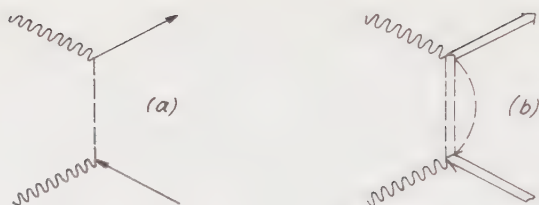


Abb. 6. Graphen des Comptoneffektes. Der Fall b entspricht einer Resonanz durch starke Wechselwirkung.

Während beim Comptoneffekt am Elektron der Graph b (Abb. 6) keine Rolle spielt, zeigt das Experiment bei der γ -Streuung am Proton eine Resonanz des Wirkungsquerschnittes bei 300 MeV (Yamagata et al. 1956). Bei dieser Energie überwiegt also der Graph b sehr stark den Graphen der einfachen Ladungsstreuung.

Der Polarisierbarkeit entspricht in einem einfachen klassischen Modell eine elastisch gebundene Ladung, dem einfallenden Quant eine periodische Kraft (Drell 1961); der Einfachheit halber lassen wir noch die natürlich vorhandene Dämpfung weg:

$$(3.1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t; \quad x = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

Das Resonanzmaximum liegt bei $\omega = \omega_0$. Zur Auswertung des dem Graphen b der Abb. 5 entsprechenden Matrixelementes muß über die Photonenlinie integriert werden, demgemäß haben wir bei unserem klassischen Modell über ω zu integrieren.

$$(3.2) \quad x(t) = \int_{\omega = \omega_0 - \Delta\omega}^{\omega = \omega_0 + \Delta\omega} \frac{A d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Da $\cos \omega t$ langsam veränderlich ist im Vergleich zur Amplitude, gilt:

$$(3.3) \quad x(t) = \left(\int_{\omega = \omega_0 - \Delta\omega}^{\omega = \omega_0 + \Delta\omega} \frac{A d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \cos \omega_0 t$$

Wegen der Antisymmetrie des Integranden um $\omega = \omega_0$ hebt sich die Ampli-

tude bei der Integration näherungsweise weg; d.h. aber, durch die Integration verschwindet die Resonanz.

Nach Werthamer und Ruderman (Werthamer 1961) ist - wenn man die Vorwärtsstreuung ausscheidet - der Beitrag der Polarisierbarkeit des Nukleons auch für höchste Energien vernachlässigbar.

Da wir in unseren Rechnungen eine Resonanz nicht berücksichtigt haben (ihr Einfluß sollte klein sein), so kann man - wenn sich bei einer Messung Abweichungen zu unseren Formeln ergeben sollten - unmittelbar auf das Wirken der Resonanz schließen. In diesem Fall wird man unsere, was die Resonanz betrifft, ganz qualitativen Betrachtungen wesentlich zu vertiefen haben.

3.2 Rechnerische Behandlung der "Struktur".

Zur Auswertung des hermiteschen Anteils des Matricelementes zweiter Ordnung (2.28), oder gleich der Asymmetrie nach (2.29), haben wir eine Winkelintegration über den Zwischenzustand auszuführen; dabei treten die allgemeinen Strukturfunktionen $F[(p-q)^2]$ und $F[(k-q)^2]$ auf. Wenn wir für die Strukturfunktionen die von Hofstadter vorgeschlagene (Hofstadter 1961) analytische Form verwenden, lassen sich die auftretenden Integrale in geschlossener Form auswerten.

Im Ergebnis treten also Formeln für die Mottsche Asymmetriegröße auf, die im Falle einer Struktur zwar nicht einfach sind, aber keine Integrale mehr enthalten und deshalb numerisch schnell zu überblicken sind. Außerdem entspricht die angenommene Struktur der Elementarteilchen - die sich im MeV Gebiet bemerkbar macht - der schon früher üblicherweise pauschal berücksichtigten "Struktur" des Atoms durch Abschirmung des Atomkerns durch die Hüllenelektronen. Unsere Formeln gelten also durch geeignete Wahl von wenigen Parametern sowohl für den "klassischen" Motteffekt - Streuung am abgeschirmten Atom im keV-Gebiet - wie für Hochenergiestreuung.

A. Struktur des Atoms. Man berücksichtigt üblicherweise das Coulombfeld des Kernes und den Einfluß der Hüllenelektronen pauschal durch ein Vachaspati-Potential (Vachaspati 1954)

$$(3.4) \quad V(r) = \frac{Ae}{r} + \frac{A'e}{r} e^{-\kappa r} = \frac{Ae}{r} (1 - \eta e^{-\kappa r}), \quad \eta = -\frac{A'}{A}$$

eine Überlagerung aus Coulomb- und Yukawapotential. Die zugehörige Ladungsverteilung wird nach Clementel-Villi (Clementel 1956) benannt:

$$(3.5) \quad \frac{1}{e} g(r) = \frac{A}{4\pi r} \eta \kappa^2 e^{-\kappa r} - A(\eta - 1) \delta(r)$$

Das Yukawa-Zusatzpotential in (4) wird durch eine Ladungsverteilung mit der Gesamtladung Null hervorgerufen. Die Gesamtladung ist eA , die Ladung des Kernes $-A(\eta - 1)e = e(A + A')$, die Ladung der Hülle also $-eA'$. Für $\eta = 0$ ($A' = 0$, $A \neq 0$) liegt ein nackter Kern, für $A=0$ ein neutrales Atom mit der Kernladung eA' und der Hüllenladung $-eA'$ vor.

Bei der Streuung am statischen Feld gehen die Fouriertransformierten des Potentials in die Matrixelemente ein (Vergl. Anhang A). Diese Fouriertransformierten

$$\tilde{V}(Q^2) = \int V(r) e^{i\vec{Q}\vec{x}} d^3x$$

lauten für reines Coulombfeld ($A' = 0$)

$$\tilde{V}(Q^2) = 4\pi A e \frac{1}{Q^2}$$

Im Falle einer allgemeinen Clementel-Villi-Ladungsverteilung aber gilt

$$(3.8) \quad \tilde{V}(Q^2) = 4\pi A e \left\{ \frac{1}{Q^2} - \frac{\eta}{Q^2 + \kappa^2} \right\}$$

Beim Übergang von einer Punktladung zu einer ausgedehnten Ladung (von "Hüllenelektronen" abgeschirmter Atomkern) in Form einer Clementel-Villi-Ladungsverteilung ist also zu ersetzen

$$(3.9) \quad \frac{1}{Q^2} \longrightarrow \frac{1}{Q^2} - \frac{\eta}{Q^2 + \kappa^2}$$

Wesentlich ist, daß wir die Matrixelemente, die mit Ausdrücken der Form (9) gebildet werden, ebenso geschlossen ausintegrieren können wie die mit (7), man vergleiche etwa die Tabelle auf Seite 48f.

Nun erhebt sich die wichtige Frage, ob über das Vachaspati-Potential hinaus noch andere Potentiale geschlossen ausintegriert werden können. Das ist jedenfalls dann der Fall, wenn das Potential darstellbar ist durch

$$(3.10) \quad V(r) = A e \int_0^{\infty} dk \, \sigma(k) \frac{e^{-kr}}{r}$$

wobei $\sigma(k)$ beschränkt ist mit Ausnahme von δ -artigen Singularitäten. Die Fouriertransformierte lautet

$$(3.11) \quad V(Q^2) = 4\pi A e \int_0^{\infty} dk \frac{\sigma(k)}{Q^2 + k^2}$$

Die Winkelintegration $\int dQ_q$ kann - man vergleiche (4.58) - ebenso wie für das Vachaspatipotential ausgeführt werden, denn es kommt dabei nur auf den Nenner $(k^2 + Q^2)$ an. Da wir in (11) mit $\sigma(k) = \zeta(k)$ den Coulombfall ausdrücklich mit einschließen, stellt (10) eine viel weitere Klasse von Potentialen dar, als man sie in der Feldtheorie (Regge 1959, Khuri 1957, Blannenbecker et al. 1960 etc.) gewöhnlich voraussetzt.

Im endlichen gelegene, kontinuierliche oder δ -artig konzentrierte (kugelsymmetrische) Ladungsverteilungen führen immer zu Potentialen, die die Darstellung (10) erlauben.

B. Struktur der Nukleonen und Atomkerne. Hofstadter (Hofstadter 1961) gibt als analytische Form der Strukturfunktionen die Überlagerung von zwei Funktionen der Art

$$(3.12) \quad F(Q^2) = \frac{k_1^2 + (1-\eta)Q^2}{k_1^2 + Q^2} = (1-\eta) + \frac{\eta k_1^2}{k_1^2 + Q^2}$$

an, also

$$(3.13) \quad F(Q^2) = (1-\eta_1-\eta_2) + \frac{\eta_1 k_1^2}{k_1^2 + Q^2} + \frac{\eta_2 k_2^2}{k_2^2 + Q^2}$$

Diese Strukturfunktionen $F(Q^2)$ sind dabei i.a. nur im Impulsraum definiert; im Grenzfall unendlich schwerer Targetkern ist die Fourier-transformierte von (12) wieder anschaulich interpretierbar und führt auf eine Clementel-Villi-Ladungsverteilung.

Bei einer Struktur der Nukleonen oder Atomkerne nach (13) ist bekanntlich die Photonenausbreitungsfunktion $\frac{1}{Q^2}$ zu ersetzen durch $\frac{\tilde{F}(Q^2)}{Q^2}$, d.h. aber es geht über

$$(3.14) \quad \frac{1}{Q^2} \longrightarrow \frac{1}{Q^2} - \frac{\eta_1}{(Q^2 + \kappa_1^2)} - \frac{\eta_2}{(Q^2 + \kappa_2^2)}$$

genau wie im Fall einer Ausdehnung einer statischen Ladung. Ob wir uns nun im Energiegebiet der keV befinden und die Struktur des Atoms berücksichtigen wollen, oder ob wir die Hochenergiestreuung am strukturierten Kern betrachten, immer können wir die "Ausdehnung" mit den nämlichen Formeln umfassen. (Freilich sind die die Struktur beschreibenden Parameter um Größenordnungen verschieden. Die in dieser Arbeit zugrunde gelegte Bornsche Näherung ist auch nach unten bis etwa 100 keV (für größere Z) brauchbar, wo die Atomstruktur eine Rolle spielt.

In der Asymmetriegröße (2.29) tritt wegen (2.30) bzw. (2.33) das obige Q^2 im Nenner dreimal auf und zwar als

$$(3.15) \quad \begin{aligned} (\vec{p} - \vec{q})^2 &= 2(\vec{p}^2 - \vec{p}\vec{q}) \\ (\vec{k} - \vec{q})^2 &= 2(\vec{p}^2 - \vec{k}\vec{q}) \\ (\vec{p} - \vec{k})^2 &= 2(\vec{p}^2 - \vec{p}\vec{k}) \end{aligned}$$

Setzen wir

$$(3.16) \quad \kappa_1^2 = 2p^2(a-1) ; \quad \kappa_2^2 = 2p^2(b-1) ,$$

so werden die neuen Parameter a, b also abhängig von p^2 (Quadrat des Dreierimpulses im Schwerpunktsystem), d.h. also praktisch von der Einfallensenergie.

Im folgenden bedeuten die Vektoren $\vec{p}_0$, $\vec{k}_0$, $\vec{q}_0$, die in den Nennern

(17) auftreten, Einheitsvektoren. Im Falle zweier Clementel-Villi-Ladungsverteilungen (Hofstadter) ist nach (14) beim Übergang zu einer Struktur jeder der im Nenner von $a_y(k,p)$ auftretende Faktor (15) durch drei Summanden zu ersetzen. Beispielsweise gilt

$$(3.17) \quad \frac{1}{(1 - \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0)} \rightarrow \frac{F[(\vec{p} - \vec{q})^2]}{(1 - \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0)} = \frac{1}{(1 - \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0)} - \frac{\eta_1}{(a - \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0)} - \frac{\eta_2}{(b - \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0)}$$

An die Stelle eines einzigen Integrals, etwa

$$(3.18) \quad f(\omega, 1, 1) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\bar{f}(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) d\Omega_q}{(1 - \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0)(1 - \vec{k}_0 \cdot \vec{q}_0)}$$

tritt dann im Hofstadterschen Fall eine Doppelsumme, die wegen

$f(\vec{q}, a, b) = f(\vec{q}, b, a)$, man vergleiche (4.47), lautet

$$(3.19) \quad f(\omega, 1, 1) \rightarrow f(\omega, S) = f(\omega, 1, 1) - 2\eta_1 f(\omega, a, 1) - 2\eta_2 f(\omega, b, 1) + 2\eta_1 \eta_2 f(\omega, a, b) + \eta_1^2 f(\omega, a, a) + \eta_2^2 f(\omega, b, b)$$

Wenn wir analog (18) noch definieren

$$(3.20) \quad \Delta(\omega, S) = \frac{F[(\vec{p} - \vec{k})^2]}{(1 - \vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)}$$

können wir den Gesamteinfluß der Struktur zusammenfassen. Dazu haben wir zu beachten, daß $a_y(k,p)$ wegen (2.29) neben $f(\vec{q}, S)$ noch einen Faktor (20) enthält; $a(k,p)$ hat zwei Faktoren (20). Bei der Bildung der Mottasymmetrie $A(k,p)$ nach (1.9) entsteht also

$$(3.21) \quad \frac{f(\omega, S)}{\Delta(\omega, S)} = T(\omega, S)$$

In (21) ist der Gesamteinfluß der Struktur zusammengefaßt. Eine Diskussion folgt im 4. Kapitel.

Das einzelne Glied von (19), etwa

$$(3.22) \quad f(\omega, a, b) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\bar{f}(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) d\Omega_q}{(a - \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0)(b - \vec{k}_0 \cdot \vec{q}_0)}$$

ist ein Integral, das in allen von uns betrachteten Fällen in geschlossener Form ausintegriert werden konnte. Damit läßt sich auch im Falle einer Struktur die Mottische Asymmetriegröße in zwar nicht einfacher, aber doch geschlossener Form angeben. Zur Auswertung sind also keine unübersichtlichen numerischen Integrationen auszuführen.

Unsere Endformeln für die Mottasymmetrie können wir immer in geschlossener Form angeben, wenn die Strukturfunktion $F(Q^2)$ durch eine endliche Summe von Ausdrücken der Form (13) gegeben ist, bzw. wenn die Photonenausbreitungsfunktion durch (14) dargestellt werden kann.

Die Verallgemeinerung der Photonenausbreitungsfunktion

$$(3.23) \quad f(t) = \frac{F(t)}{t} = \sum_i \frac{\eta_i}{t + \kappa_i^2} \quad t \equiv Q^2$$

ist - wie im Fall der Potentialstreuung -

$$(3.24) \quad f(t) = \int_0^\infty \frac{\sigma(\kappa) d\kappa}{t + \kappa^2}$$

Auch mit (24) läßt sich die erforderliche Winkelintegration in geschlossener Form ausführen. Es verbleiben lediglich Parameterintegrationen; man vergleiche (4.58).

Analog der Behandlung des allgemeinen Potentials (10) hätten wir die Frage zu stellen, welche Photonenausbreitungsfunktionen durch (24) darstellbar sind. Denken wir an eine komplexe Fortsetzung der Photonenausbreitungsfunktion (Fubini 1961), so scheint es vernünftig, die Fragestellung umzukehren und überhaupt nur solche $f(t)$ zuzulassen, die durch (24) darstellbar sind. Damit ist nämlich dann eine Aussage über das analytische Verhalten von $f(t)$ in der komplexen t -Ebene gewonnen: $f(t)$ ist analytisch in der ganzen, entlang der negativen Achse aufgeschnittenen t -Ebene.

4. Kapitel: Abbildung der Symmetrien auf die Permutationsgruppe.

4.1 Ableitung der Transformationsgruppe.

Die Mottische Asymmetrie ist als Integral über die Raumrichtungen des Zwischenimpulses gegeben

$$(4.1) \quad a_y(k, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\Omega_q \bar{a}_y(p, k, q)$$

Die im ersten Kapitel abgeleiteten Symmetrien, im wesentlichen die von der PT-Invarianz herrührende Beziehung

$$(4.2) \quad a_y(k, p) = -r_y(p, k)$$

und die aus der Drehsymmetrie und PT-Invarianz folgende Relation

$$(4.3) \quad a_y(k, p) = r_y(k, p)$$

bedeuten also Symmetrie der Integrale. Nun zeigen aber schon die Integranden, die wir gemäß (1) mit einem Querstrich definieren, untereinander so starke Ähnlichkeit, daß die Frage nahe liegt, inwieweit die Symmetrien, besonders (2) und (3) auch für die Integranden $\bar{a}_y(p, k, q)$ und $\bar{r}_y(p, k, q)$ selbst gelten.

Mit $\lambda = \frac{2\pi p E_1 E_2}{|E_1 + E_2|}$ ist nach (1.40) bzw. (1.39) und (1.37)

$$(4.4a) \quad \bar{a}_y(p, k, q) = -\lambda \gamma p [\gamma^5 \gamma^2 P(p) M_1(p, k) P(k) M_1(k, q) P(q) M_1(q, p)]$$

$$(4.4b) \quad = \lambda \gamma p [\gamma^5 \gamma^2 P(p) M_1(p, q) P(q) M_1(q, k) P(k) M_1(k, p)]$$

$$(4.5a) \quad \bar{r}_y(p, k, q) = \lambda \gamma p [\gamma^5 \gamma^2 P(k) M_1(k, p) P(p) M_1(p, q) P(q) M_1(q, k)]$$

$$(4.5b) \quad = -\lambda \gamma p [\gamma^5 \gamma^2 P(k) M_1(k, q) P(q) M_1(q, p) P(p) M_1(p, k)]$$

Unter Verwendung der unter (1.10) definierten Größen $N_{\eta\eta'}(k, p)$ können wir (4a), (4b) und (5a), (5b) schreiben:

$$(4.6a) \quad \bar{a}_y(p, k, q) = -\lambda \sum_{\eta\eta'\eta''} \eta' N_{1\eta'\eta}(p, k) N_{1\eta\eta''}(k, q) N_{1\eta''\eta'}(q, p)$$

$$(4.6b) \quad = \lambda \sum_{\eta\eta'\eta''} \eta' N_{1\eta'\eta}(p, q) N_{1\eta''\eta}(q, k) N_{1\eta\eta'}(k, p)$$

$$(4.7a) \quad \bar{r}_y(p, k, q) = \lambda \sum_{\eta \eta' \eta''} \eta' N_{1\eta' \eta}(k, p) N_{1\eta \eta''}(p, q) N_{1\eta'' \eta'}(q, k)$$

$$(4.7b) \quad = \lambda \sum_{\eta \eta' \eta''} \eta' N_{1\eta' \eta}(k, q) N_{1\eta \eta''}(q, p) N_{1\eta'' \eta'}(p, k)$$

Wegen der PT-Invarianz ist nach (1.15)

$$N_{\eta' \eta}(k, p) = N_{-\eta - \eta'}(p, k)$$

Damit geht (6a) in (6b) und (7a) in (7b) über. Das ist nichts anderes als die Äquivalenz der Ausdrücke (4a) mit (4b) und damit der Beweis für (1.40), den wir dort nur erwähnt hatten.

Man erkennt durch Vergleich von (4a) mit (4b) oder von (6a) mit (6b), daß die Ausdrücke durch die Transformation

$$(B) \quad \begin{array}{l} \vec{p} \rightarrow \vec{q} \\ \vec{k} \rightarrow \vec{q} \\ \vec{q} \rightarrow \vec{k} \end{array}$$

ineinander übergehen. Die transformierte Größe reproduziert sich dabei mit dem Faktor -1.

Analog geht der Integrand (7a) in (7b) - bzw. (5a) in (5b) - über durch die Transformation

$$(C) \quad \begin{array}{l} \vec{p} \rightarrow \vec{q} \\ \vec{k} \rightarrow \vec{k} \\ \vec{q} \rightarrow \vec{p} \end{array}$$

(und Multiplikation mit -1)

Die Gleichheit der integrierten Größen $a_y(k, p)$ und $r_y(k, p)$ folgte nach (1.32) aus der Drehsymmetrie zusammen mit der PT-Invarianz. Wann aber gilt Gleichheit der Integranden (4) und (5) ?

a) Die allgemein gültige Symmetrie (1.19)

$$(4.8) \quad N_{\eta\eta'}(k,p) = N_{\eta'\eta}(k,p),$$

die lediglich die Drehsymmetrie und PT-Invarianz voraussetzt, reicht sichtlich nicht zur Äquivalenz aus; es folgt nur die Gleichheit der reellen Anteile des Matricelementes 2. Ordnung (9) und (10), die integrierte Größen sind:

$$(4.9) \quad \text{Re } N_{2\eta\eta'}(k,p) = \frac{\lambda}{2\pi} \int d\Omega_q \sum_{\eta''} N_{1\eta\eta''}(k,q) N_{1\eta''\eta'}(q,p)$$

$$(4.10) \quad \text{Re } N_{2\eta'\eta}(k,p) = \frac{\lambda}{2\pi} \int d\Omega_q \sum_{\eta''} N_{1\eta'\eta''}(k,q) N_{1\eta''\eta}(q,p)$$

Damit gilt, wie wir schon wissen, Gleichheit der integrierten Asymmetriegrößen $a_y(k,p) = r_y(k,p)$.

b) Wenn aber die Matricelemente für Spinumklapp identisch Null sind, was, wie wir im Anschluß an (1.20) gesehen haben, immer für Streuung am Spin-0-Target der Fall ist

$$(4.11) \quad N_{1\eta'\eta}(k,p) = N_{1\eta\eta'}(k,p) \delta_{\eta\eta'},$$

dann kann (6b) wie (7a) geschrieben werden

$$(4.12) \quad \sum_{\eta'} \eta' N_{1\eta'\eta'}(k,p) N_{1\eta'\eta'}(p,q) N_{1\eta'\eta'}(q,k).$$

Unter dieser Voraussetzung gilt also die gesuchte Gleichheit von $\bar{a}_y(p,k,q)$ und $\bar{r}_y(p,k,q)$. Die Bedingung des Verschwindens der Spinumklappelemente (11) bedeutet zwar nicht für ein Spin-0-Target, wohl aber für ein Spin-1/2-Target eine physikalische Einschränkung.

Bei Auswertung der Spur $\bar{a}_y(p,k,q)$ für die verschiedenen Fälle des Targetteilchens können wir also beim Auftreten eines Gliedes, das gegen die Transformation B, aber nicht gegen C und A (siehe unten) das geforderte Verhalten zeigt, sofort schließen, daß dieses vom Spinumklapp herrühren muß. Ein solches Glied finden wir tatsächlich bei der Streuung eines Diraceteilchens an einem Diraceteilchen. Ähnlich wür-

den bei der Auswertung von $\vec{r}_y(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ alle Glieder gegen C das geforderte Verhalten zeigen müssen. Es können Verletzungen gegen A und B auftreten, die dann wieder vom Spinumklapp herrühren.

Nun setzen wir für das folgende die Bedingung (11) voraus. Dann gilt Gleichheit von (6a) und (7a), also von (4a) und (5a). (4a) geht aber in (5a) über durch die Transformation

$$(A) \quad \begin{array}{ccc} \vec{p} & \longrightarrow & \vec{k} \\ \vec{k} & \longrightarrow & \vec{p} \\ \vec{q} & \longrightarrow & \vec{q} \end{array}$$

(und Multiplikation mit dem Faktor -1).

Da (4a) mit (5a) natürlich auch (5b) gleich ist, haben wir nunmehr (unter den Voraussetzungen Drehsymmetrie, PT-Invarianz und des Verschwindens der Matrixelemente für Spinumklapp) alle Transpositionen A, B, C der drei Elemente p, k, q.

Den direkten Übergang (4a) zu (5b) finden wir mit

$$(F) \quad \begin{array}{ccc} \vec{p} & \longrightarrow & \vec{k} \\ \vec{k} & \longrightarrow & \vec{q} \\ \vec{q} & \longrightarrow & \vec{p} \end{array}$$

(ohne Vorzeichenwechsel). Wir hätten aber auch zuerst nach (5a), dann nach (5b) gehen können. Dem entspricht

$$A \cdot C = F$$

Man erkennt, daß die Transformationen A, B, C und F zusammen mit $D = F^{-1}$ (der Transformation, die (5b) in (4a) überführt) und der Identität E eine Gruppe bilden. Es ist die Permutationsgruppe, die Anzahl der zu permutierenden Dinge $(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ ist $n = 3$, also ist die Anzahl der Gruppenelemente $n! = 6$ (E, A, B, C, D, F). Da bei jeder Transposition (A, B, C) die Asymmetriegröße ($\vec{q}$ bzw. $\vec{p}$) mit -1 multipliziert wird, liegt ersichtlich die antisymmetrische Darstellung der Permutations-

gruppe vor, die den geraden Permutationen die Matrix (1)

$$(4.13) \quad M(E) = (1), \quad M(D) = (1), \quad M(F) = (1)$$

den ungeraden Permutationen (hier gleich den einfachen Transpositionen) die Matrix (-1) zuordnet

$$(4.14) \quad M(A) = (-1), \quad M(B) = (-1), \quad M(C) = (-1)$$

4.2 Die Asymmetriefunktionen.

Wir betrachten nun die Polarisationsgröße $\vec{a}_y(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ im Raum der $\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}$. Nur solche Funktionen $\vec{f}(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ können die Polarisation $\vec{a}_y(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ aufbauen

$$(4.15) \quad \vec{a}_y(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) = \sum c_n \vec{f}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}),$$

die bei Permutationen der Impulse das oben geforderte Transformationsverhalten zeigen, die sich also bei Transpositionen X mit dem Faktor -1 reproduzieren.

$$(4.16) \quad X \cdot \vec{f}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) = - \vec{f}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$$

Eine zweite Forderung, die an die Funktionen $\vec{f}(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ gestellt werden muß, ist, daß sie die y-Komponente eines Vektors darstellen, da die Größe $\vec{a}_y(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$, die sie aufbauen sollen, diese Eigenschaft hat.

Wie man allgemein aus (4a) oder genauer aus den folgenden Kapiteln 5 und 6 (und dem Anhang A) ersieht, wo die Ausdrücke für die Mottasymmetrie für die verschiedenen Fälle angeschrieben sind, ist $\vec{a}_y(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ als Spur über γ -Matrizen (oder als Produkt von Spuren) gegeben, kann also nur ganzzahlige Potenzen der Impulse $\vec{p}$, $\vec{k}$ und $\vec{q}$ enthalten. Der höchste auftretende Exponent wird dabei eine kleine positive ganze Zahl sein. Zu dieser Spur treten lediglich noch kinematische Faktoren (wie E_1 , E_2 , p) und das Produkt der drei strukturabhängigen Ausdrücke (3.15), das invariant gegen Transpositionen ist.

Die Asymmetriefunktionen $\bar{f}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ werden also Polynome in den drei Impulsen sein. Aus ihnen erhält man unter Berücksichtigung des Nenners, der von den strukturabhängigen Faktoren herrührt, die Winkelabhängigkeit der Mottasymmetrie durch Integration über $d\Omega_q$, d.h. durch

$$(4.17) \quad f_n(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\bar{f}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})}{(a - \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0)(b - \vec{k}_0 \cdot \vec{q}_0)} d\Omega_q$$

(Wie bei den Asymmetriegrößen selbst bezeichnen wir die nichtintegrierten Größen mit einem Querstrich. Die Impulse $\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}$, die ja im Schwerpunktsystem die gleiche Länge haben, fassen wir - im Nenner von (17) und im Argument von f - als Einheitsvektoren auf.)

Die allgemeinste Funktion, die der Forderung (16) genügt, hat die Gestalt

$$(4.18) \quad \psi(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) - \psi(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) - \psi(\vec{q}, \vec{k}, \vec{p}) + \psi(\vec{k}, \vec{q}, \vec{p}) - \psi(\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}) + \psi(\vec{q}, \vec{p}, \vec{k})$$

Wir suchen nun, von der Potenz Null aufsteigend, sukzessive die ersten Funktionen $\bar{f}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$, die den oben aufgestellten Forderungen, insbesondere (16), genügen.

a) Potenz Null.

Eine Konstante ist gegen Transpositionen invariant, eine Potenz Null der Impulse kann bei den Funktionen $\bar{f}_n$ nicht auftreten.

b) Potenz Eins.

Geht man von einem beliebigen Impuls $\vec{p}, \vec{k}$ oder $\vec{q}$ (oder einer Komponente davon) aus und antisymmetriert nach Vorschrift (18), so ergibt sich jedesmal Null. Man kann auch die allgemeinste Funktion

$$(4.19) \quad F(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) = \alpha_e p_e + \beta_e k_e + \gamma_e q_e$$

anschreiben und darauf die Operationen (16) anwenden. Mit

$$\alpha_e = -\beta_e, \quad \alpha_e = -\gamma_e, \quad \beta_e = -\gamma_e \quad \text{ergibt sich}$$

$$(4.20) \quad \alpha_e = \beta_e = \gamma_e = 0$$

Eine Potenz Eins der Impulse kann bei den Funktionen $\bar{f}_n$ nicht auftreten.

ten.

c) Potenz Zwei.

Ein Skalarprodukt zweier Vektoren würde nach (18) antisymmetrisiert immer Null ergeben. Ein Skalarprodukt kann auch deshalb niemals auftreten, weil es ein Skalar und nicht die y-Komponente eines Vektors ist. Es bleibt das Vektorprodukt; $[\vec{p} \times \vec{q}]$, ergibt nach (18) antisymmetrisiert

$$(4.21) \quad [\vec{p} \times \vec{q}]_y - [\vec{k} \times \vec{q}]_y - [\vec{p} \times \vec{k}]_y = \bar{f}_1(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$$

Die x- und z-Komponenten (22), (23) hätten zwar das geforderte Transformationsverhalten (16), können aber natürlich nicht die y-Komponente eines Vektors darstellen. Damit stimmt überein, daß die Funktionen

$$(4.22) \quad [\vec{p} \times \vec{q}]_x - [\vec{k} \times \vec{q}]_x - [\vec{p} \times \vec{k}]_x \equiv 0$$

$$(4.23) \quad [\vec{p} \times \vec{q}]_z - [\vec{k} \times \vec{q}]_z - [\vec{p} \times \vec{k}]_z \equiv -2 \sin \frac{\theta}{2} q_y$$

mindestens nach der Integration $\int \frac{d\Omega}{N}$ identisch verschwinden.

(Die Funktionen $\bar{f}_n$ stellen wir - um die Integration durchführen zu können - in einem speziellen Koordinatensystem dar. Besonders bequem ist die Wahl von $\vec{p} + \vec{k}$ als z- und von $\vec{k} - \vec{p}$ als x-Achse. Damit ergeben sich dann die Ausdrücke (22) und (23).

Man beweist leicht, daß (21) auch die einzige Funktion der Potenz Zwei ist: Mit dem Ansatz (24) für die allgemeinste Funktion

$$(4.24) \quad F(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) = \alpha_{em} p_e p_m + \beta_{em} k_e k_m + \gamma_{em} q_e q_m + \\ + \delta_{em} p_e q_m + \varepsilon_{em} q_e k_m + \zeta_{em} k_e p_m$$

erhält man durch die Forderung (16)

$$(4.25) \quad F(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) = \delta_{em} (p_e q_m + q_e k_m + k_e p_m)$$

$$(4.26) \quad \delta_{em} = - \delta_{me}$$

Das bedeutet aber gerade, daß $F(p,k,q)$ aufgebaut wird aus (21), (22), (23), jeweils multipliziert mit den beliebigen Konstanten δ_{13} , δ_{23} und δ_{12} .

d) Potenz Drei.

Aus der Determinantentheorie ist bekannt, daß die Determinante $D(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ die einzige Funktion der drei Impulse $\vec{p}$, $\vec{k}$ und $\vec{q}$ mit der Eigenschaft (16) ist. Die Determinante ist aber ein Skalar und kann deshalb nicht die geforderte Vektorkomponente darstellen. Damit stimmt überein, daß nach der q -Integration $\int \frac{D(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) d\vec{q}}{N(p, k, q)}$ die Funktion identisch verschwindet.

Bisher haben wir nur die Funktion $\bar{f}_1(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ gefunden, die das geforderte Verhalten (16) aufweist. Diese Funktion enthält $\vec{q}$ linear. Die nächsten Funktionen, die wir noch betrachten wollen, sind die, die $\vec{q}$ bis einschließlich quadratischen Termen enthalten. Wir zählen im folgenden die (nichtintegrierten) Asymmetriefunktionen $\bar{f}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ auf und geben dabei jeweils das Integral $f(\mathcal{J}, a, b)$ nach (17) an. Im Falle reiner Coulombwechselwirkung sind die angegebenen Funktionen $f(\mathcal{J}, 1, 1)$ schon die integrierten Asymmetriefunktionen. Die Integration haben wir hierbei zunächst auch - zur Vermeidung von Divergenzen - allgemein auszuführen, dann schließen wir einen Grenzübergang $a \rightarrow 1$, $b \rightarrow 1$ an. Für eine Struktur (etwa zwei Clementel-Villi-Verteilungen) erhalten wir die Asymmetriefunktionen aus dem allgemeinen Glied durch eine Summation

$$(4.27) \quad f(\mathcal{J}, 5) = f(\mathcal{J}, 1, 1) - 2\eta_1 f(\mathcal{J}, a, 1) - 2\eta_2 f(\mathcal{J}, b, 1) \\ + 2\eta_1 \eta_2 f(\mathcal{J}, a, b) + \eta_1^2 f(\mathcal{J}, a, a) + \eta_2^2 f(\mathcal{J}, b, b)$$

Als Abkürzungen verwenden wir im folgenden

$$(4.28) \quad x = \cos \mathcal{J} \quad ; \quad \beta^2 = x^2 - 2abx + a^2 + b^2 - 1$$

Tabelle der $\bar{f}_n(p, k, q)$ und der Integrale (17)

1. In $\vec{q}$ linear:

$$(4.29) \quad \bar{f}_1(p, k, q) = \{ [\vec{p} \times \vec{q}]_y - [\vec{k} \times \vec{q}]_y - [\vec{p} \times \vec{k}]_y \} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} (\vec{p} \vec{q} + \vec{k} \vec{q} - p^2 - \vec{p} \cdot \vec{k})$$

Durch Integration folgt

$$(4.30) \quad f_1(\vartheta, 1, 1) = 4 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$(4.31) \quad f_1(\vartheta, a, b) = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left\{ \ln \frac{a-1}{a+1} + \ln \frac{b-1}{b+1} + \frac{2(a+b-1-x)}{\beta} \ln \frac{a-b-x+\beta}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}} \right\}$$

$$(4.32) \quad f_1(\vartheta, b, 1) = 2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{b-x}{b+1}$$

2. In $\vec{q}$ quadratisch:

$$(4.33) \quad \bar{f}_2(p, k, q) = D(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) \{ p_y + k_y + q_y \} \\ = \frac{1}{\sin \vartheta} \left[- \{ p q + k q - p^2 - p k \}^2 + 4 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} (p^2 - p q)(p^2 - k q) \right]$$

Durch Integration folgt

$$(4.34) \quad f_2(\vartheta, 1, 1) = -4 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$(4.35) \quad f_2(\vartheta, a, b) = -\frac{1}{\sin \vartheta} \left[(b-ax) \ln \frac{a-1}{a+1} + (a-bx) \ln \frac{b-1}{b+1} + 2\beta \ln \frac{a-b-x+\beta}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}} \right]$$

$$(4.36) \quad f_2(\vartheta, b, 1) = -\frac{1}{\sin \vartheta} \left[2(b-x) \ln \frac{b-x}{\sqrt{(b^2-1)}} + (1-bx) \ln \frac{b-1}{b+1} \right]$$

3. In $\vec{q}$ quadratisch:

$$\begin{aligned}
 (4.37) \quad \bar{f}_3(p, k, q) &= [\vec{p} \times \vec{q}]_y, [\vec{k} \times \vec{q}]_y, [\vec{p} \times \vec{k}]_y = \\
 &= \frac{1}{\sin \vartheta} \left[\cos \vartheta \{pq + kq - p^2 - pk\}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 4 \cos^4 \frac{\vartheta}{2} (p^2 - pq)(p^2 - kq) - \sin^2 \vartheta \{pq + kq - p^2 - pk\} \right]
 \end{aligned}$$

Durch Integration folgt

$$(4.38) \quad f_3(\vartheta, 1, 1) = -4 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left[\ln \sin \frac{\vartheta}{2} + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 (4.39) \quad f_3(\vartheta, a, b) &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \left[(a-bx) \ln \frac{a-1}{a+1} + (b-ax) \ln \frac{b-1}{b+1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2(a-bx)(b-ax)}{\beta} \ln \frac{ab-x+\beta}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}} + 2 \sin^2 \vartheta \right]
 \end{aligned}$$

$$(4.40) \quad f_3(\vartheta, b, 1) = -\frac{1}{\sin \vartheta} \left[(b-x) \ln \frac{b-1}{b+1} + 2(1-bx) \ln \frac{b-x}{\sqrt{(b^2-1)}} + 2 \sin^2 \vartheta \right]$$

4. In $\vec{q}$ quadratisch:

$$\begin{aligned}
 (4.41) \quad \bar{f}_4(p, k, q) &= \{ [\vec{p} \times \vec{q}]_y, -[\vec{k} \times \vec{q}]_y, -[\vec{p} \times \vec{k}]_y \} (pq + kq + p^2 + pk) = \\
 &= \frac{1}{\sin \vartheta} \left[(1 - \cos \vartheta) \{pq + kq - p^2 - pk\}^2 + 2 \sin^2 \vartheta \{pq + kq - p^2 - pk\} \right]
 \end{aligned}$$

Durch Integration folgt

$$(4.42) \quad f_4(\vartheta, 1, 1) = 8 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left[\cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \ln \sin \frac{\vartheta}{2} + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} \right]$$

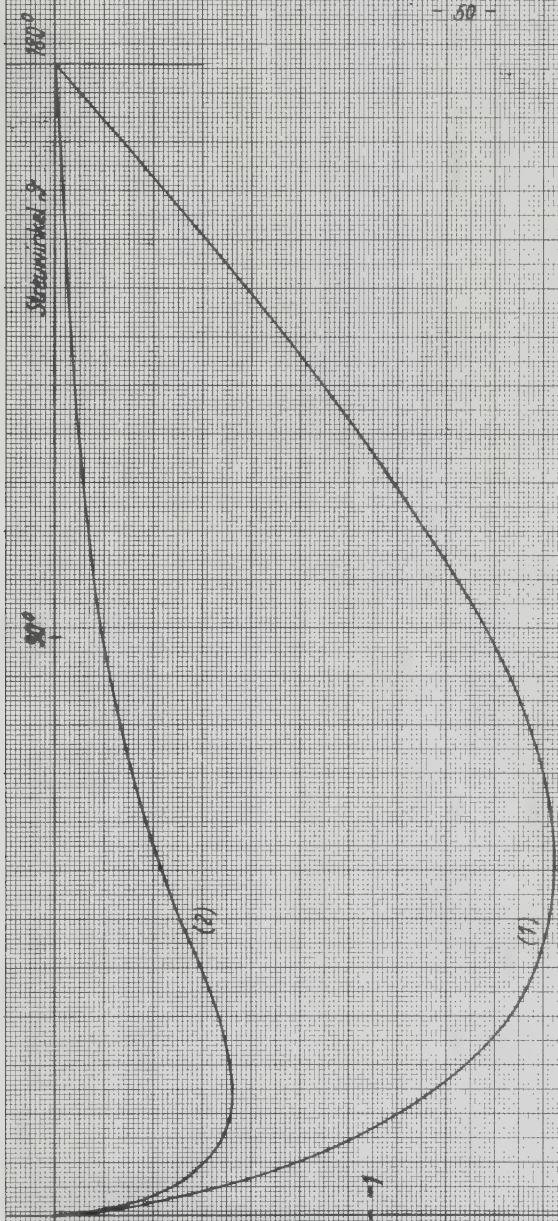


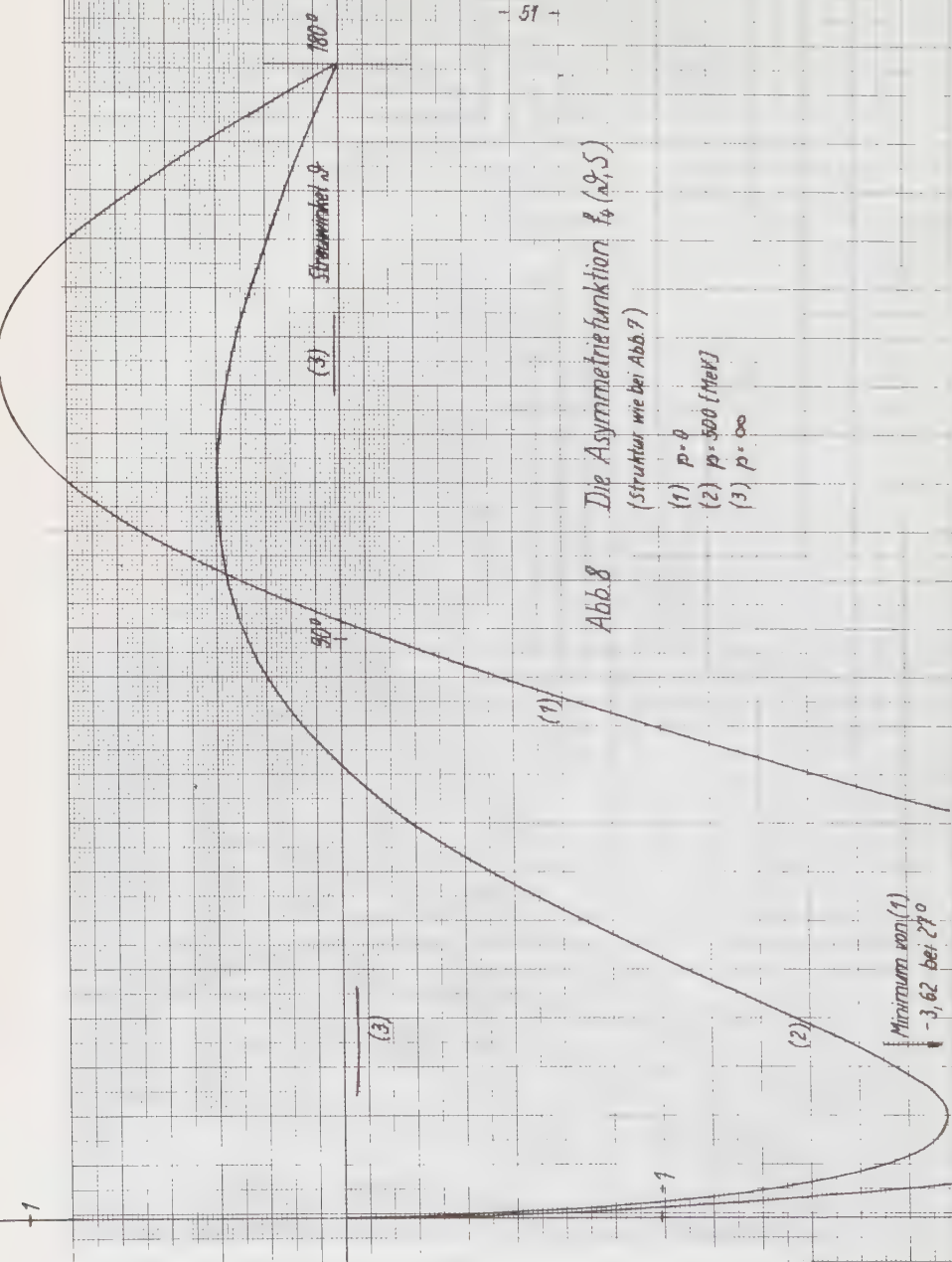
Abb. 7 Die Asymmetriefunktion $f(p, S)$ für Hofstadter's Struktur

(Zwei Clementel-Villi-Ladungsverteilungen

$z_1 = 0,28$, $z_2 = 1,848 \cdot 10^{-2}$ ($z_1 = 0,6$, $z_2 = 3,8805 \cdot 10^{-1}$ ($z_1 = 1,3$))

(1) $p = 0$ $f(p, S) = f(0, 1,1)$

(2) $p = 500 \text{ MeV}$ $a = 1,3836$, $b = 1,7784$

Abb. 8 Die Asymmetriefunktion $f_4(\alpha, S)$

(Struktur wie bei Abb. 7)

(1) $p = 0$ (2) $p = 500 \text{ [MeV]}$ (3) $p = \infty$

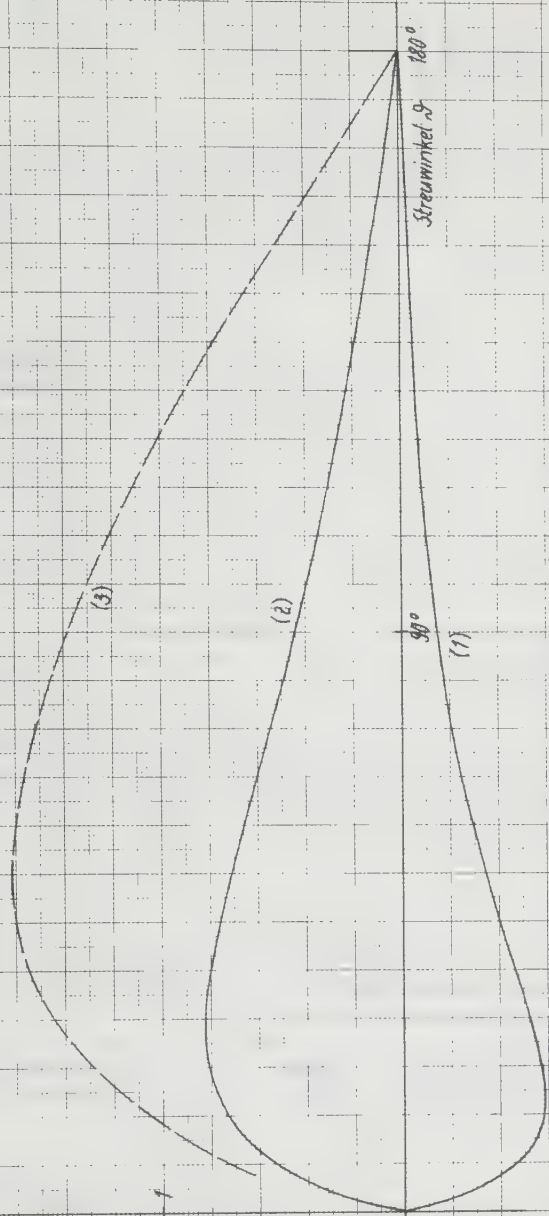


Abb. 9 Die lineare Unabhängigkeit von $\varphi_1(\vartheta, S)$ und $\varphi_2(\vartheta, S)$

(1) $\varphi_1(\vartheta, S)$

(2) $\varphi_2(\vartheta, S)$

(3) $\varphi_3(\vartheta, S)$

für eine Hofstadter-Struktur mit den Parametern von Abb. 7

Im Coulombfall ist $\varphi_1(\vartheta, 1) \equiv \varphi_2(\vartheta, 1)$

$$(4.43) \quad f_4(\vartheta, a, b) = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left\{ [a+b+a(1+x)] \ln \frac{a-1}{a+1} + [a+b+b(1+x)] \ln \frac{b-1}{b+1} \right. \\ \left. + \frac{2[(a+b)^2 - (1+x)^2]}{\beta} \ln \frac{ab-x+\beta}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}} + 8 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right\}$$

$$(4.44) \quad f_4(\vartheta, b, 1) = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \left\{ (1+2b+bx) \ln \frac{b-1}{b+1} + 2(2+b+x) \ln \frac{b-x}{\sqrt{(b^2-1)}} + 8 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right\}$$

Im Grenzfall $a \rightarrow 1$, $b \rightarrow 1$ entarten die sonst linear unabhängigen Funktionen $f_1(\vartheta)$ und $f_2(\vartheta)$. Es gilt dann

$$(4.45) \quad -f_2(\vartheta, 1, 1) = f_1(\vartheta, 1, 1)$$

Wir notieren noch als interessante Beziehung

$$(4.46) \quad \frac{d}{dx} f_2(x) = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} f_3(x) ; \quad x = \cos \vartheta$$

Wichtig ist die allgemein gültige Symmetrierelation

$$(4.47) \quad f_n(\vartheta, a, b) = f_n(\vartheta, b, a),$$

die aus (31), (35), (39) und (43) abgelesen werden kann. Allgemeiner folgt (47) aus der Betrachtung des Integrals (38). - Zu diesem Abschnitt vergleiche man die graphische Darstellung der Asymmetriefunktionen in den Abb. 7-10.

4.3 Die Darstellung der Struktur.

Wie wir durch (3.21) sahen, drückt sich der Einfluß einer Struktur mathematisch in der Gestalt der Asymmetriefunktion $f(\vartheta, S)$ aus, aber darüber hinaus in dem "Strukturfaktor"

$$(4.48) \quad \gamma(\vartheta, S) = \frac{1}{(1-\vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)} - \frac{\eta_1}{(a-\vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)} - \frac{\eta_2}{(b-\vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)}$$

Der Gesamteinfluß der Struktur wird also nach (3.21) durch

$$(4.49) \quad T_n(\vartheta, S) = \frac{f_n(\vartheta, S)}{s(\vartheta, S)} \equiv \frac{f_n(\vartheta, S)(1 - \vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)}{F[(p-k)^2]}$$

dargestellt. Solche Größen werden dann tatsächlich auch als allein von der Struktur abhängig in unseren Ausdrücken für die Mottasymmetrie auftreten. (Vergl. die Durchführung der konkreten Rechnung im 5. und 6. Kapitel.)

Für den Grenzfall $p \rightarrow 0$ geht $a \rightarrow \infty$ und $b \rightarrow \infty$ und damit

$$(4.50) \quad \frac{f(\vartheta, S)}{s(\vartheta, S)} \longrightarrow f(\vartheta, 1, 1)(1 - \vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)$$

d.h. "Niedrige Energie kann die Struktur nicht sehen". Für $p \rightarrow \infty$ wird $a \rightarrow 1$ und $b \rightarrow 1$, das bedeutet

$$(4.51) \quad \frac{f(\vartheta, S)}{s(\vartheta, S)} \longrightarrow (1 - \eta_1 - \eta_2) f(\vartheta, 1, 1)(1 - \vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)$$

Bei sehr hohen Energien wirkt also nur die Restladung des δ -artigen harten Kernes, denn $(1 - \eta_1 - \eta_2)$ ist gerade das Verhältnis (Ladung im "hard core"): (Gesamtladung). Es liegen also hier die Verhältnisse ebenso wie beim Wirkungsquerschnitt, der aber quadratisch, nicht linear von den Ladungen der an der Streuung beteiligten Teilchen abhängt.

Den Verlauf der Asymmetriefunktion $T_n(\vartheta, S)$ zwischen den Grenzfällen $p = 0$ (50) und $p = \infty$ (51) können wir für den besonders wichtigen Spezialfall $h = 1$ noch genauer angeben. Dazu betrachten wir die Definition von a und b (3.16)

$$(4.52) \quad a = 1 + \frac{\kappa_1^2}{2p^2}$$

$$(4.53) \quad b = 1 + \frac{\kappa_2^2}{2p^2}$$

Mit fallendem Impuls p (Betrag des Dreierimpulses im Schwerpunktsystem) wachsen a und b monoton von 1 nach unendlich, dabei steigt

- man vergleiche Abb. 10 - $T_1(\vartheta, S)$ von $(1-\eta_1-\eta_2) f_1(\vartheta, 1, 1)(1-\vec{p}_0 \vec{k}_0)$ nach $f_1(\vartheta, 1, 1)(1-\vec{p}_0 \vec{k}_0)$. Dieser Anstieg ist nun, wie wir (für verschiedene Winkel) in einer direkten numerischen Rechnung gezeigt haben, monoton. (Nur im Grenzfall δ -artiger Ladungen $\eta_1 = \eta_2 = 0$ bleibt die Funktion konstant.)

Im Falle einer Streuung (eines Diraceteilchens ohne anomales Moment) an einem Spin-0-Target wird die Mott-symmetrie (5.9) ausschließlich durch $f_1(\vartheta, S)$ bestimmt, andere Asymmetriefunktionen kommen nicht vor. Aus dem obengesagten folgt damit unmittelbar der Satz: Im Falle eines Spin-0-Targets nimmt für eine ausgebreitete Ladung einheitlichen Vorzeichens mit zunehmender Einfallsenergie (d.h. $p \rightarrow \infty$) der Mott-effekt monoton ab.

Eine ähnliche Monotonie wie für $T_1(\vartheta, S)$ und damit für die Mott-asymmetrie an einem Spin-0-Target kann man i.a. nicht erwarten. Ein Blick auf Abb. 8 zeigt, daß schon für $f_4(\vartheta, S)$ bzw. $T_4(\vartheta, S)$ die Monotonie in der Nähe der Nullstelle gestört ist; umso mehr gilt das für die Mottasymmetrie, die im allgemeinen Fall eine Linearkombination aus $T_n(\vartheta, S)$ ist mit von E_1 , E_2 und p abhängigen Koeffizienten (vergl. 65).

Die in der Tabelle von (4.29) bis (4.51) angegebenen Relationen sind vor allem angemessen zur Beschreibung einer Struktur nach Hofstadter. Im Falle einer ganz allgemeinen Photonenausbreitungsfunktion (3.24)

$$(4.54) \quad \bar{F}(t) = \int_0^\infty \frac{\sigma(x) dx}{x^2 + Q^2}$$

oder eines allgemeinen Potentials (3.10) bzw. (3.11) tritt an Stelle von $f_n(\vartheta, 1, 1)$

$$(4.55) \quad f_n(\vartheta, S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty dx_1 dx_2 \sigma(x_1) \sigma(x_2) \int \frac{\bar{T}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) d\Omega_q}{2p^2 [x_1^2 + 2p^2(1-\vec{p}_0 \vec{q}_0)] \frac{1}{2p^2} [x_2^2 + 2p^2(1-\vec{k}_0 \vec{q}_0)]}$$

Mit

$$(4.56) \quad \kappa_i^2 = 2p^2 \varepsilon_i^2 \quad (i = 1, 2)$$

wird aus (55)

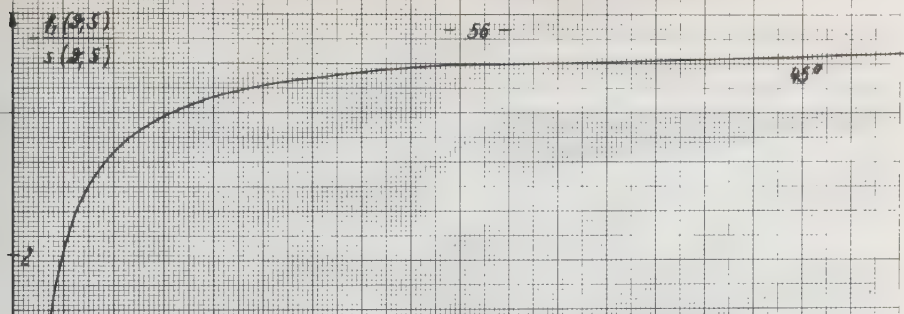
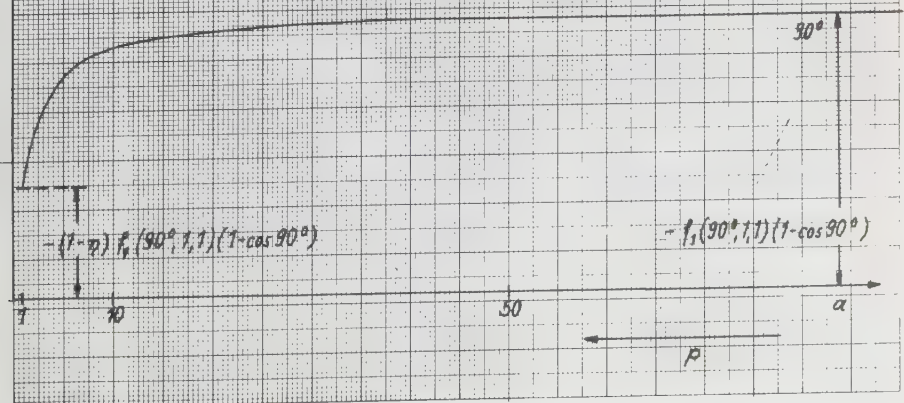


Abb 10 Strukturabhängigkeit von $\frac{f_1(90, S)}{S(2, S)} = -I(90, S)$
für eine Clementel-VIII-Ladungsverteilung
mit $\rho = 0.6$



$$(4.57) \quad f_n(\vartheta, S) = \frac{2p^2}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \tilde{\sigma}(\varepsilon_1) \tilde{\sigma}(\varepsilon_2) \left\{ \frac{\bar{f}_n(\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) d\Omega_q}{[1 + \varepsilon_1^2 - \vec{p}_0 \vec{q}_0][1 + \varepsilon_2^2 - \vec{k}_0 \vec{q}_0]} \right\}$$

Die Winkelintegration läßt sich nun geschlossen ausführen, und wir erhalten

$$(4.58) \quad f_n(\vartheta, S) = 2p^2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \tilde{\sigma}(\varepsilon_1) \tilde{\sigma}(\varepsilon_2) f_n(\vartheta, 1 + \varepsilon_1^2, 1 + \varepsilon_2^2)$$

Ob die verbleibende doppelte Parameterintegration geschlossen ausführbar ist, hängt von der Gestalt der Gewichtsfunktionen ab.

Nun erhebt sich die wichtige Frage, inwieweit die Kenntnis der möglichen Asymmetriefunktionen (die nach (15) die Mottasymmetrie bilden) bereits zur Kenntnis der Mottasymmetrie selbst führt. Dazu wollen wir zunächst noch einen weiteren Schluß aus der TC-Invarianz der Wechselwirkung ziehen.

Mit (1.16) folgt mit TC-Invarianz aus (1.24), (1.25) und (1.26)

$$(4.60) \quad a_y(k^0, \vec{k}; p^0, \vec{p}) = -a_y(-k^0, \vec{k}; -p^0, \vec{p})$$

$$(4.61) \quad r_y(k^0, \vec{k}; p^0, \vec{p}) = -r_y(-k^0, \vec{k}; -p^0, \vec{p})$$

$$(4.62) \quad a(k^0, \vec{k}; p^0, \vec{p}) = a(-k^0, \vec{k}; -p^0, \vec{p})$$

Da die Transformation von der Integration ($d\Omega_q$ nicht betroffen wird, gelten die Relationen (60), (61), (62) auch für die noch nicht integrierten Größen $\bar{a}_y(p, k, q)$ und $\bar{r}_y(p, k, q)$.

Liegt nun eine Streuung am Spin-0-Target vor, so ist in der Näherung $E_2 \approx M_2 \rightarrow \infty$ (Potentialstreuung) - man vergleiche (5.7) und (5.7a) - die auszuwertende Spur

$$(4.63) \quad \bar{a}_y(p, k, q) \sim \text{Sp} [i \gamma^5 \gamma^2 (\hat{p} + i m_1) \gamma^0 (\hat{k} + i m_1) \gamma^0 (\hat{q} + i m_1) \gamma^0] \cdot (2E_2)^3$$

Da q nur in der 1. Potenz vorkommen kann, ist $f_1(\vartheta)$ die einzig mögliche Asymmetriefunktion.

Die Größe $a(k, p)$, die den Nenner der Asymmetrie $A(k, p)$ bildet,

kennt man (sie stellt ja im wesentlichen den Wirkungsquerschnitt dar) und hat damit schon die Winkelabhängigkeit der Asymmetrie:

$$(4.64) \quad A \sim \frac{Z\alpha m}{(E^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2})} \cdot \frac{f_1(\vartheta, s)}{s(\vartheta, s)}$$

Die Proportionalität mit $Z\alpha$, die wir noch angegeben haben, ist typisch für die Asymmetrie in dieser Bornschen Näherung, die Abhängigkeit von s erkennen wir sofort aus der Spur (63), die f^5 und eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen enthält.

In diesem einfachsten Fall ist also die Asymmetrie bis auf einen Zahlenfaktor und Potenzen von $\frac{p}{E}$ festgelegt. Durch Beachtung der TC-Invarianz kann man die Willkür der Faktoren noch einschränken und die Faktoren bis auf Potenzen von $(\frac{p}{E})^2$ bestimmen.

Im allgemeinen Fall können neben $f_1(\vartheta, s)$ noch höhere Asymmetriefunktionen auftreten. Dann ist

$$(4.65) \quad A(k, p) = \frac{Z\alpha m}{a(k, p)} \left\{ C_1 \frac{f_1(\vartheta, s)}{s(\vartheta, s)} + C_2 \frac{f_2(\vartheta, s)}{s(\vartheta, s)} + \dots \right\}$$

Die Anzahl der auftretenden Asymmetriefunktionen vermögen wir leicht abzuzählen, aber über die kinematischen Faktoren C_n , die von E_1 , E_2 und p abhängen, können wir nur mit Hilfe der TC-Invarianz eine recht allgemeine Aussage machen: Die Koeffizienten C_n müssen die Energie in ungerader Potenz enthalten, man vergleiche etwa 5.8. Wenn wir auch ohne Rechnung die C_n (außer noch weiteren Aussagen für die asymptotischen Fälle $M \rightarrow \infty$) nicht festlegen können, haben wir mit (65) doch eine gewisse Übersicht erreicht.

In diesem Kapitel haben wir schlechthin von "Struktur" gesprochen, d.h. für die Fälle, wo ein anomales Moment zu berücksichtigen ist, stillschweigend gesetzt $F_1(q^2) \equiv F_2(q^2)$. Wenn diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist, wird die durch die Permutationsgruppe ausgedrückte Symmetrie gestört und die Mottasymmetrie nicht mehr allein durch die Asymmetriefunktionen dargestellt.

5. Kapitel. Berechnung der Streuung am Spin-0-Target.

5.1 Streuung eines Diraceteilchens

Die gesuchte Asymmetriegröße

$$(5.1) \quad A(k, p) = \frac{a_y(k, p)}{a(k, p)}$$

erhalten wir mit (1.4)

$$(5.2) \quad a(k, p) = \text{sp} [P(k) M_1(k, p) P(p) \overline{M}_1(k, p)]$$

und mit (2.29)

$$(5.3) \quad a_y(k, p) = - \frac{E_1 E_2 p}{|E_1 + E_2|} \int d\Omega_q \text{sp} [\gamma^5 \gamma^2 P(p) M_1(p, k_2) P(k) M_1(k, q) P(q) M_1(q, p)]$$

Die Auswertung von $a(k, p)$ liefert mit (2.30)

$$(5.4) \quad a(k, p) = \left\{ \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{m_1}{2E_1 E_2} \right\}^2 \frac{1}{4p^+} \frac{F^2(q^2)}{(1 - \vec{p}_0 \vec{k}_0)^2} \frac{2}{m_1^2} K_0$$

$$(5.4a) \quad K_0 = \frac{1}{3} [(\hat{k}_2 + i m_1) \gamma^\mu (\hat{p} + i m_1) \gamma^\nu] (p_2 + k_2)_\mu (p_2 + k_2)_\nu \\ = \frac{1}{4} [p^2 (E_1 + E_2)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2]$$

Bekanntlich ist $a(k, p)$ bis auf Faktoren der gewöhnliche (spinsummierte) Wirkungsquerschnitt (im Schwerpunktsystem)

$$(5.5) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{F^2(q^2)}{4p^+ \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} [(E_1 + E_2)^2 p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2]$$

Ohne Struktur ist natürlich

$$(5.6) \quad F(q^2) \equiv 1$$

Setzt man (2.30) in (3) ein, ergibt sich

$$(5.7) \quad \overline{a}_y(p, k, q) = - \left\{ \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{m_1}{2E_1 E_2} \right\}^3 \frac{E_1 E_2 p \cdot 2\pi}{|E_1 + E_2| \cdot 8p^6} \cdot \frac{F[(p-k)^2] F[(p-q)^2] F[(k-q)^2]}{(1 - \vec{p}_0 \vec{k}_0) (1 - \vec{p}_0 \vec{q}_0) (1 - \vec{k}_0 \vec{q}_0)} \cdot \frac{L_0}{m_1^3}$$

$$(5.7a) \quad L_0 = \frac{1}{8} \text{sp} [\gamma^5 \gamma^2 (-i \hat{p} + m_1) \gamma^8 (-i \hat{k} + m_1) \gamma^\mu (-i \hat{q} + m_1) \gamma^\nu] (p_2 + k_2)_\mu (k_2 + q_2)_\nu (p_2 + q_2)_\nu$$

Die Auswertung von L_0 liefert nach längerer Rechnung mit f_1 nach (4.29)

$$(5.8) \quad L_0 = 4m_1 \{ 2p^2(E_1+E_2) + M_2^2(2E_1+E_2) \} \bar{f}_1(\vec{p}, \vec{E}_1, \vec{q})$$

Die direkte Rechnung bestätigt also die allgemeinen Ergebnisse von Kapitel 4, nach dem wir für L_0 nur Asymmetriefunktionen erhalten können; nach Abzählung der Potenzen hätte (abgesehen von der höchsten Potenz $M_2^2 E_2$) allerdings auch noch f_2 , f_3 und f_4 auftreten können. Wie es sein muß, erhalten wir die Energie in ungerader Potenz.

Die Integration von (8) können wir nach Kapitel 4 nun sofort hinschreiben. Wir setzen das Ergebnis in (7) ein und erhalten dann für die Asymmetrie

$$(5.9) \quad A = - \frac{m_1 p Z \alpha \{ (2E_1+E_2) M_2^2 + 2p^2(E_1+E_2) \} f_1(\vartheta, s)}{4|E_1+E_2| \{ p^2(E_1+E_2)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2 \} s(\vartheta, s)}$$

Ohne Struktur wird daraus

$$(5.10) \quad A = - \frac{2m_1 p Z \alpha \{ (2E_1+E_2) M_2^2 + 2p^2(E_1+E_2) \} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tan \frac{\vartheta}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2}}{|E_1+E_2| \{ p^2(E_1+E_2)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2 \}}$$

(9) bzw. (10) ist die exakte Formel für die Mottpolarisation bei Streuung eines Diraceteilchens an einem Target mit Spin Null; die Formel war bisher nur für den Grenzfall $M_2 \rightarrow \infty$ (Potentialstreuung) bekannt. Physikalisch haben wir damit die Streuung eines Elektrons oder μ -Mesons an π - und K-Mesonen und an Kernen mit Spin 0 erfaßt. (Alle g - g -Kerne, wie Helium 4, Kohlenstoff 12, Sauerstoff 16, etc haben den Kernspin Null).

Über das Vorzeichen der Asymmetrie läßt sich durch eine qualitative Überlegung leicht Klarheit gewinnen, die zudem anschaulich den Mechanismus des Motteffektes aufzeigt: Durch die relative Bewegung zwischen Atomkern und Elektron "sieht" das Elektron nach Biot-Savart ein Magnetfeld. Die Elektronen, deren Spins in der Abbildung 11 nach oben, deren magnetische Momente also nach unten gerichtet sind, werden durch die Wechselwirkung ihres magnetischen Momentes mit dem Magnetfeld nach rechts abgelenkt: So steht etwa für die das Target links

passierenden Teilchen (Stoßparameter 1 in Abb. 11) das magnetische Moment in Feldrichtung und die Teilchen werden in Richtung zunehmender Feldstärke getrieben. Diese Wechselwirkung überlagert sich der gewöhnlichen Wechselwirkung zwischen den beiden elektrischen Ladungen und führt zur Mottpolarisation. Diese kommt demnach durch eine Änderung des Streuwinkels zustande: Die Teilchen mit Spin nach oben werden durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung um einen kleinen zusätzlichen Betrag nach rechts, die Teilchen mit Spin nach unten nach links verschoben.

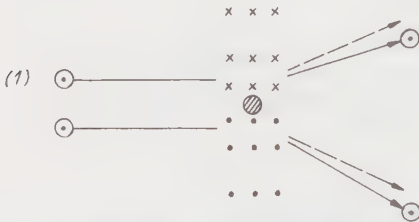


Abb. 11. Asymmetrie durch die magn. Momente der Elektronen. Die Streuung durch reine Ladungswechselwirkung (gestrichelt) ist symmetrisch.

So können wir für die Mottpolarisation und Mottasymmetrie Vorzeichenregeln aussprechen, die für die Elektron-Kernstreuung gelten. (Bei Änderung des Ladungsvorzeichens eines der beteiligten Teilchen ändert sich ersichtlich gerade das Vorzeichen der Asymmetrie bzw. der Polarisation.)

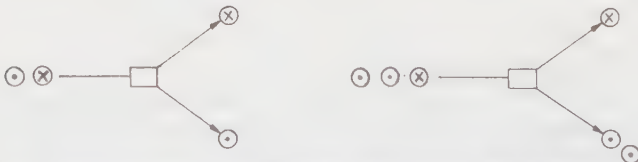


Abb. 12. Vorzeichenregeln für den Motteffekt am Spin-O-Target.

Wenn man in der Streuebene steht und in Richtung des Primärstrahles blickt, sieht man zur Linken die Spins bevorzugt nach unten, zur

Rechten bevorzugt nach oben stehen.

Wenn man so in der Streuebene steht, daß die Spins des primären Elektronenstrahles (bevorzugt) nach oben stehen und in Richtung des Primärstrahles blickt, erhält man das Maximum des differentiellen Wirkungsquerschnittes für die Streuung nach rechts. (Die Aussagen sind natürlich drehinvariant.) Zu anderen Ergebnissen kommt man, wenn man auch Umklappungen (bzw. "Drehungen") des Elektronenspins in Betracht zieht, die für den hier vorliegenden Fall des Spin-0-Targets, wie erwähnt, verboten sind. Man vergleiche in Abschnitt 6.2 den andersartigen Mechanismus der bei der Streuung an Spin-1/2-Targets ins Spiel kommt (dortige Abb. 18).

Lassen wir in (10) die Masse des Targetteilchens M_2 sehr groß werden, so erhalten wir in der Näherung

$$(5.11) \quad p \ll M_2 \approx E_2$$

aus (10) den schon von Sauter (Sauter 1933) für die Streuung am Coulombfeld erhaltenen Ausdruck

$$(5.12) \quad A = - \frac{2m_1 p Z \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} t_0 \frac{\theta}{2} \ln \sin \frac{\theta}{2}}{E^2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m^2}{E^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

Zur gleichen Formel (12) kommen wir, wenn wir (vergl. den Abschnitt 6.1) die Rechnung am Spin-1/2-Target durchführen und in der dortigen Formel (6.12) dieselbe Näherung $M_2 \rightarrow \infty$ durchführen: Bei sehr schwerer Targetmasse spielt der Kernspin, insbesondere auch Umklappungen des Kernspins, keine Rolle. Damit stimmt überein, daß man bei niedrigeren Energien (d.h. im keV-Bereich) ohne Rücksicht auf die Ordnungszahl des Kernes die Streuung als Potentialstreuung beschreiben kann. Man vergleiche dazu auch (A.27).

Führt man die Berechnung der Asymmetriefunktion (12), d.h. der Shermanfunktion nach der Partialwellenmethode durch (Sherman 1959, Hückel 1963), so zeigt sich beim Aufsteigen von 1 keV zu immer höheren Energien eine zunehmende Annäherung an den Verlauf (12). (12) liefert für alle Winkel ein einheitliches Vorzeichen, während die Rechnung

nach der Methode der Partialwellen bei 340 keV noch eine Nullstelle mit einem sehr flachen Kurvenverlauf mit entgegengesetztem Vorzeichen zeigt (Hückel 1963).

Zur Auswertung der exakten Formel (10) bedienen wir uns des im Anhang C geschilderten numerischen Verfahrens; wir verzichten also darauf, die expliziten Formeln der Mottpolarisation im Laborsystem in dieser Arbeit anzugeben, weil sie sehr unübersichtlich werden.

Wir diskutieren Formel (10) direkt und vergleichen damit die durch numerische Rechnung erhaltene Kurve (Abb. 13 und 14). Man erkennt aus (10), daß der Nenner der Asymmetriegröße, also im wesentlichen der Wirkungsquerschnitt, beim gleichzeitigen Übergang zu hohen Energien $p^2 \gg m_1^2$ und zu großen Winkeln (Rückwärtsstreuung) nach Null geht.

Da A nicht größer als 1 werden kann (wenn die Bornsche Näherung nicht völlig versagen sollte), geht in diesem Fall selbstverständlich der Zähler auch nach Null; wir untersuchen das Verhalten der Asymmetriegröße durch eine gleichzeitige Entwicklung nach hohen Energien und sehr großen, π benachbarten Winkeln.

$$(5.13) \quad \varepsilon = \frac{m_1}{p} \quad 1. \text{Entwicklungsparameter (Energie)}$$

$$(5.14) \quad \delta = \frac{1}{2}\pi - \frac{\vartheta}{2} \quad 2. \text{Entwicklungsparameter (Winkel)}$$

2δ ist also die Differenz zwischen Streuwinkel und 180° .

Es ist

$$(5.15) \quad \sin \frac{\vartheta}{2} \sim 1 - \frac{\delta^2}{2}, \quad \cos \frac{\vartheta}{2} \sim \delta, \quad \ln \sin \frac{\vartheta}{2} \sim -\frac{\delta^2}{2}$$

Für die geschweifte Klammer im Zähler von (10) können wir schreiben $E_2(2E_1E_2 + E_2^2 + p^2) \sim E_2(E_1 + E_2)^2$ bis auf einen Fehler $E_2 m_1^2$, den wir wegen der Entwicklung nach hohen Energien vernachlässigen können. Dann kommt

$$(5.15) \quad A = \frac{Z\alpha\varepsilon\delta}{\frac{E_1 + E_2}{E_2} \delta^2 + \frac{E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon^2}$$

Setzt man

$$(5.17) \quad \delta' = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \delta$$

so folgt

$$(5.18) \quad A = \frac{\frac{1}{2} \alpha}{\frac{\delta'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\delta'}}$$

Das Maximum liegt bei

$$(5.19) \quad \delta' = \varepsilon$$

und hat immer die gleiche Höhe von

$$(5.20) \quad A = \frac{1}{2} \alpha$$

Um die Halbwertsbreite des Maximums zu bestimmen, setzen wir $x = \frac{\delta'}{\varepsilon}$. Die Funktion $x + \frac{1}{x}$ geht vom Minimum bei $x = 1$ bis $x = 4$ von 2 auf 4,25, also sinkt A um den entsprechenden Faktor, der ca. der Halbwertsbreite entspricht. Nach der anderen Seite ist bei $x = \frac{1}{4}$ wieder die gleiche Funktionshöhe wie bei $x = 4$ erreicht; insgesamt gilt also für die Halbwertsbreite

$$(5.21) \quad \Delta \delta' \approx 4 \delta'_{\max}$$

Das Maximum rückt also mit zunehmender Energie nicht nur immer mehr an 180° heran, sondern es prägt sich auch immer schärfer aus. In der Grenze bei unendlicher Energie liegt das Maximum bei 180° . Da aber physikalisch die Energie immer endlich bleibt, ist bei $\vartheta = 180^\circ$ stets $A = 0$.

Als Zahlenbeispiele hat man nach (5.19) und (5.21)

Einfallsimpuls (im Schwerpunktsystem)	Maximum $\frac{1}{2} \alpha$	Halbwertsbreite
$p = 5 \text{ MeV}$	$\vartheta \sim 169^\circ$	$\Delta \delta' \sim 45^\circ$
$p = 50 \text{ MeV}$	$\vartheta \sim 179^\circ$	$\Delta \delta' \sim 4^\circ$
$p = 500 \text{ MeV}$	$\vartheta \sim 179^\circ 51'$	$\Delta \delta' \sim \frac{1}{2}^\circ$

Diese durch die Näherung (13) und (14) gewonnenen Werte findet man (natürlich auch durch direkte Auswertung von (9) (Abbildungen 13 und 14.)

In der Literatur war bisher nur die Rede davon, daß die Mottasymmetrie mit steigender Energie des einfallenden Elektrons nach Null geht. Diese Aussage können wir nun für das Spin-0-Target entscheidend verschärfen: Wir definieren zunächst einen Grenzwinkel ϑ_g , für den nach Relation (19) die Asymmetrie ein Maximum hat; die Energie wählen wir so niedrig wie möglich, aber so, daß das Maximum (20) noch hinreichend gut durch (19) gegeben ist. (Diese Relationen sind ja nach Voraussetzung nur für $\frac{m_1}{p} \ll 1$ gültig.) Durch numerische Rechnung finden wir als geeignet:

$$(5.22) \quad p = 1 \text{ MeV}, \quad \vartheta_g = 137^\circ, \quad A = 0.41 Z\alpha$$

(Diese Werte entsprechen gerade dem Maximum der Kurve 1 in Abbildung 13). Man sieht, daß (19) und (20) selbst für $\xi = \frac{m_1}{p} \sim \frac{1}{2}$ noch mit guter Genauigkeit erfüllt sind. Nun kommen wir zur Aussage, die für Impulse oberhalb 1 MeV/c gültig ist. Für jeden Winkel $\vartheta < \vartheta_g$ nimmt mit Erhöhung der Energie die Mottasymmetrie größenordnungsmäßig wie

$$(5.23) \quad A \sim Z\alpha \frac{m_1}{p}$$

ab; für $\vartheta > \vartheta_g(\xi)$ nimmt die Mottasymmetrie mit Erhöhung der Einfallsenergie (Abnahme von ξ) zunächst zu, bis das Maximum bei $\xi = \xi'$ d.h. bei $\xi = \frac{E_1 + E_2}{E_2} \frac{1}{2} (\pi - \vartheta)$ erreicht ist. Das Maximum hat natürlich die Höhe

$$(5.24) \quad A = \frac{1}{2} Z\alpha.$$

Dann nimmt die Mottasymmetrie rasch ab (etwa um einen Faktor 4 steiler als der Anstieg) und mündet schließlich asymptotisch in (23). Selbst bei einer noch so hohen Energie existiert also für ein Spin-0-Target das Maximum (24), allerdings, wie wir sahen, mit einer verschwindenden Halbwertsbreite nach (21).

Die größtmögliche Asymmetrie erhalten wir also bei Rückwärtsstreuung; in diesem Fall haben wir aber auch maximale Energie-Impulsübertragung, d.h. maximale Strukturabhängigkeit. Es schiene deshalb sehr reizvoll, bei den angegebenen Winkeln eine Polarisierung des Primärstrahles

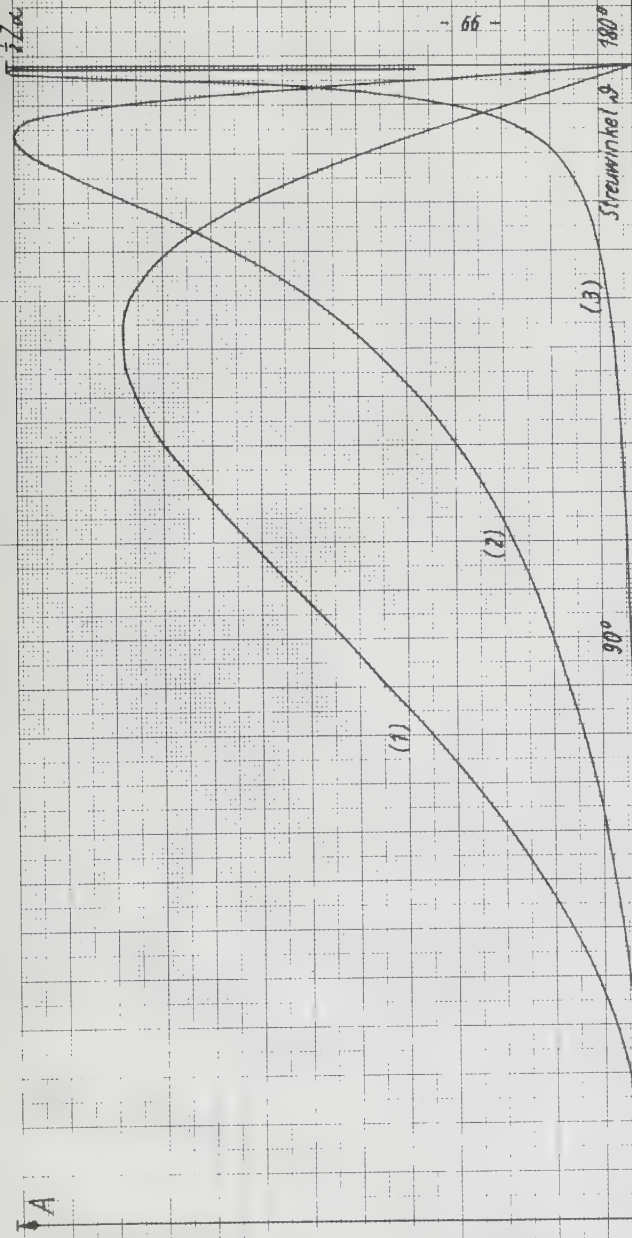


Abb.13 Mottasymmetrie für Elektron- π -Meson-Streuung (Z.1)

(1) $p = 1 \text{ MeV}$; Einfallenergie im Laborsystem $E_1 = 1,13 \text{ MeV}$

(2) $p = 5 \text{ MeV}$; $E_1 = 5,20 \text{ MeV}$

(3) $p = 50 \text{ MeV}$; $E_1 = 51,0 \text{ MeV}$

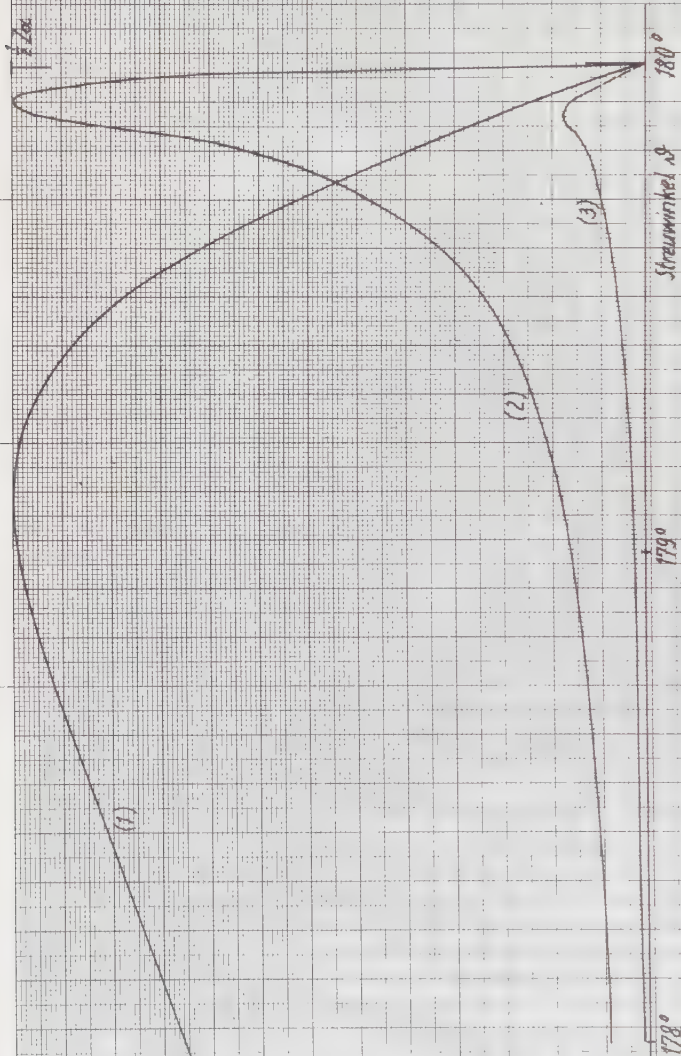


Abb. 14 Mottasymmetrie für Elektron- π -Meson-Streuung: Die Maxima bei Rückwärtsstreuung

- (1) $p = 50 \text{ MeV}$; $E_f = 71 \text{ MeV}$
- (2) $p = 500 \text{ MeV}$; $E_f = 3,7 \text{ GeV}$
- (3) $p = 500 \text{ MeV}$ mit Holstadter-Struktur (Parameter wie bei Abb. 7)

durchzuführen, bzw. die Asymmetrie zu messen. Eine Trennung der nach rückwärts gestreuten Elektronen vom Primärstrahl kann man durch Anlegen eines starken Magnetfeldes senkrecht zur Streuebene erreichen.

Das Verschwinden des Wirkungsquerschnitts, eine für diese "Resonanz" notwendige Voraussetzung, gibt uns die Möglichkeit, den Effekt für den recht eigenartigen Grenzfall sehr hoher Energie, d.h. $p \rightarrow \infty$ zu verstehen: Man betrachte die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung in das Maximum, d.h. in einen Winkelbereich $-\frac{1}{2}\Delta\vartheta + \vartheta_{\max} < \vartheta < \frac{1}{2}\Delta\vartheta + \vartheta_{\max}$ ($\Delta\vartheta$ bedeutet die Halbwertsbreite). Da der Wirkungsquerschnitt (5) wie $\frac{1}{p^4}$ nach Null geht (auch das Abwandern von $\vartheta_{\max}$ ist zu berücksichtigen) und die Halbwertsbreite nach (21) und (19) wie $\frac{1}{p}$, so konvergiert mit wachsender Energie die Gesamtzahl der "resonant" gestreuten Elektronen außerordentlich rasch nach Null.

$$(5.25) \quad n_{\text{Res}} \sim \frac{1}{p^5}$$

Der Effekt verschwindet also für $p \rightarrow \infty$ mangels Intensität.

Im Anhang B haben wir als Maß für die Meßbarkeit des Asymmetrieeffektes eine Güte G definiert, $G \sim A \cdot \sqrt{\frac{JG'}{\sigma\Omega}}$. Ebenso wie Asymmetrie und Wirkungsquerschnitt haben wir auch die Güte G in unserem Rechenprogramm an der IBM 7090 für die verschiedenen Fälle ausgerechnet. Es zeigt sich, daß G (für festgehaltene Energie) über weite Winkelbereiche praktisch konstant ist, vor allem, daß das Maximum in der Asymmetrie sich nicht in einem Ansteigen von G bemerkbar macht.

Das Maximum bei Rückwärtsstreuung ist außerordentlich empfindlich gegen ein magnetisches Moment des Kernes, weil in diesem Fall der Wirkungsquerschnitt nicht in der ausgeführten Weise ($\vartheta \rightarrow 180^\circ$, $\frac{m}{p} \rightarrow 0$) gegen Null geht, wie man durch Vergleich von (5.4a) mit (6.4a) erkennt. Nach unserer bisherigen Kenntnis besitzen alle g - g -Kerne Kerndrehimpulse $I = 0$ und Kernmomente $\frac{e\hbar}{2M} = 0$. Mit diesem Maximum der Asymmetrie würde es möglich sein, ein etwaiges $\neq 0$ sehr genau zu bestimmen. Diese Messung würde gegenüber der Messung des Wirkungsquerschnittes den Vorteil haben, daß ein ausgeprägter, für große Z sogar sehr großer Effekt vor-

handen ist.

5.2 Streuung eines Fermions mit anomalem Moment

Wie in Abschnitt 5.1 gelten mit $F_1(Q^2) \equiv F_2(Q^2)$, das wir hier allgemein voraussetzen wollen, die Formeln (1), (2), (3), (4) und (7); die Berücksichtigung des anomalen Momentes im Matrixelement führt dazu, daß statt (4a) jetzt gilt

$$(5.26) \quad K_0 = \frac{1}{8} \text{Sp} \left[(\hat{k} + i m_1) \left\{ \gamma^u + \frac{i\kappa}{2m_1} (\hat{p} - \hat{k}) \gamma^u \right\} (\hat{p} + i m_1) \left\{ \gamma^v + \frac{i\kappa}{2m_1} (\hat{k} - \hat{p}) \gamma^v \right\} (p_2 + k_2)_\mu (p_2 + k_2)_\nu \right. \\ \left. = 4 \left(1 + \frac{\kappa^2 q^2}{4m_1^2} \right) (E_1 E_2 + p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2})^2 - (1 + \kappa^2) q^2 (M_2^2 + p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}) \right]$$

Für den spinsummierten Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem erhalten wir statt (5) nun

$$(5.27) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\alpha)^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{F^2(q^2)}{4p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left\{ \left(1 + \frac{\kappa^2 q^2}{4m_1^2} \right) (E_1 E_2 + p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2})^2 - \frac{1}{4} (1 + \kappa^2) q^2 (M_2^2 + p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}) \right\}$$

Die entscheidende Spur L_0 , die nach (7) das Verhalten von $\bar{a}_y(p, k, q)$ bestimmt, ist hier

$$(5.28) \quad L_0 = \frac{1}{8} \text{Sp} \left[i \gamma^5 \gamma^2 (\hat{p} + i m_1) \left\{ \gamma^5 + \frac{i\kappa}{2m_1} (\hat{p} - \hat{k}) \gamma^5 \right\} (\hat{k} + i m_1) \left\{ \gamma^u + \frac{i\kappa}{2m_1} (\hat{k} - \hat{q}) \gamma^u \right\} \cdot \right. \\ \left. \cdot (\hat{q} + i m_1) \left\{ \gamma^v + \frac{i\kappa}{2m_1} (\hat{q} - \hat{p}) \gamma^v \right\} \right] (p_2 + k_2)_\mu (k_2 + q_2)_\nu (p_2 + q_2)_\nu$$

Die Auswertung dieses Ausdrucks ist sehr mühsam. Schon in der niedrigsten Ordnung im anomalen Moment (linear in κ) erhalten wir drei Spuren mit γ^5 und 8 γ -Matrizen und neun Spuren mit γ^5 und 6 γ -Matrizen.

Wir haben L_0 in der Ordnung κ noch exakt, in den Ordnungen κ^2 und κ^3 wenigstens in der höchsten Potenz von E_2 ausgerechnet:

$$\begin{aligned}
 (5.29) \quad L_0 = & 4m_1 \{ 2p^2(E_1+E_2) + M_2^2(2E_1+E_2) \} \bar{f}_1(\vartheta) \\
 & - 4 \frac{\kappa}{2m_1} \left[4m_1^2 E_2^2 (E_1+E_2) \bar{f}_1(\vartheta) + 2m_1^2 E_2 p^2 \{ \bar{f}_1(\vartheta) + \bar{f}_2(\vartheta) \} \right. \\
 & \quad + 2p^4 (E_1+E_2) \{ 2\bar{f}_2(\vartheta) + \bar{f}_4(\vartheta) \} + M_2^2 E_1 p^2 \{ 2\bar{f}_2(\vartheta) + \bar{f}_4(\vartheta) \} \\
 & \quad \left. - 2p^2 \{ 2p^2(E_1+E_2) + M_2^2(2E_1+E_2) \} \bar{f}_1(\vartheta) \right] \\
 & + 16 \left(\frac{\kappa}{2m_1} \right)^2 E_2^3 m_1 (m_1^2 - 2p^2) \bar{f}_1(\vartheta) + 8 \left(\frac{\kappa}{2m_1} \right)^3 E_2^3 p^2 (2m_1^2 - p^2) \bar{f}_1(\vartheta)
 \end{aligned}$$

Nach den allgemeinen Ausführungen im 4. Kapitel gilt (28) für eine beliebige Struktur, die bei der Integration der $\bar{f}_n(\vartheta)$ zu den Asymmetriefunktionen $f_n(\vartheta)$ zu berücksichtigen ist.

Physikalische Anwendungen.

1. Formel (29), die nur bis zu Gliedern linear im anomalen Moment $\frac{\kappa e}{2m_1}$ exakt ist, wird für sehr große m_1

$$(5.30) \quad m_1 \gg M_2 \quad ; \quad m_1 \gg p$$

sehr gut erfüllt sein.

Anhand der noch nicht ausgerechneten Spur (28) erkennt man, daß Terme bis zur dritten Ordnung in κ auftreten können; wegen der Näherung (30) ist die Größenordnung durch die Potenzen von $m_1 v E_1$ gegeben. Die höchsten Terme mit κ^3 und κ^2 sind von der Ordnung m_1^0 bzw. m_1 , bleiben also um mindestens eine Größenordnung hinter dem höchsten Term linear in κ zurück. Es gibt also in der Näherung (30) mit (4.49)

$$(5.31) \quad A = - \frac{m_1 p^2 \alpha \{ (2E_1+E_2) M_2^2 + 2p^2(E_1+E_2) - 2\kappa E_2^2 E_1 \} T_1(\vartheta, S)}{4(E_1+E_2) \left\{ \left(1 + \frac{\kappa^2 q^2}{4m_1^2} \right) (E_1 E_2 + p^2 \omega^2 \frac{\vartheta}{2})^2 - \frac{1}{4} (1+\kappa)^2 q^2 (M_2^2 + p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}) \right\}}$$

die Mottasymmetrie für die Streuung eines Diraceteilchens mit anomalem Moment an einem Spin-0-Target gut wieder. Die angegebene Struktur kann sich entweder auf das gestreute Fermion oder das Target beziehen.

Da das Fermion nach Voraussetzung ein anomales Moment besitzt, muß es ein stark-wechselwirkendes Teilchen sein. Deshalb bräuchten wir, um mit (31) den physikalischen Motteffekt darzustellen, ein nur elektromagnetisch wechselwirkendes Teilchen mit Spin Null. Ein solches Teilchen ist nicht bekannt. So stellt also (31) etwa nur den elektromagnetischen Anteil der Asymmetrie der π -Meson-Proton-Streuung dar. Es scheint durchaus nützlich, diesen elektromagnetischen "Untergrund" (31) vom Anteil der starken Wechselwirkung abzutrennen.

2. In (29) haben wir in allen Potenzen des anomalen Momentes den Beitrag in der Ordnung E_2^3 ausgerechnet, der in der Näherung

$$(5.32) \quad M_2 \gg m_1; \quad M_2 \gg p$$

den weit überwiegenden Anteil in (29) und damit zum Motteffekt bildet. Da bei sehr schwerer Targetmasse (32) der Spin des Targets keine Rolle spielt (siehe Abschnitt 6.2), können wir in dieser Näherung die Streuung von Protonen an beliebigen schweren Kernen darstellen. Nach (32) sollte das Atomgewicht dieser Kerne möglichst hoch sein, wegen der Gültigkeit der Bornschen Näherung (Entwicklungsparameter $\frac{Z\alpha}{\beta}$) die Ordnungszahl möglichst niedrig. Gut geeignet - auch in technischer Hinsicht - scheinen die leichten Platinmetalle zu sein, etwa Rhodium 103 ($Z = 45$). Es gilt dann für die Streuung des Protons $\kappa = 1,7927$

$$(5.33) \quad A = \frac{m_1 p Z \alpha \left\{ (2E_1 E_2) M_2^2 + 2p^2 (E_1 + E_2) - \frac{E_2^3 \kappa}{m_1^4} \left[2m_1^4 - p^2 m_1^2 + \kappa m_1^2 (2p^2 - m_1^2) + \frac{\kappa^2 p^2}{4} (p^2 - 2m_1^2) \right] \right\}}{4 |E_1 E_2| \left\{ \left(1 + \frac{\kappa^2 p^2}{4 m_1^2} \right) (E_1 E_2 + p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) - \frac{1}{4} (1 + \kappa)^2 q^2 (M_2^2 + p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}) \right\}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

Der Beitrag des anomalen Momentes kommt - wie auch schon in (31) - in die gleiche Größenordnung wie der Beitrag des normalen Momentes. Das ist klassisch-anschaulich verständlich, da das vom Kern am Ort des Protons erzeugte magnetische Feld auf beide Anteile einwirkt. Wegen der starken Wechselwirkung stellt (33) wieder nicht den Gesamteffekt, sondern nur den elektromagnetischen Anteil dar.

Die Auswertung zeigt für $p = 5$ GeV (Einfallensenergie des Protons $E_1 = 5,3$ GeV) ein bemerkenswert hohes Maximum $1.748 Z\alpha$ (Abb. 15). Die elektromagnetische Wechselwirkung liefert also zur Protonenpolarisa-

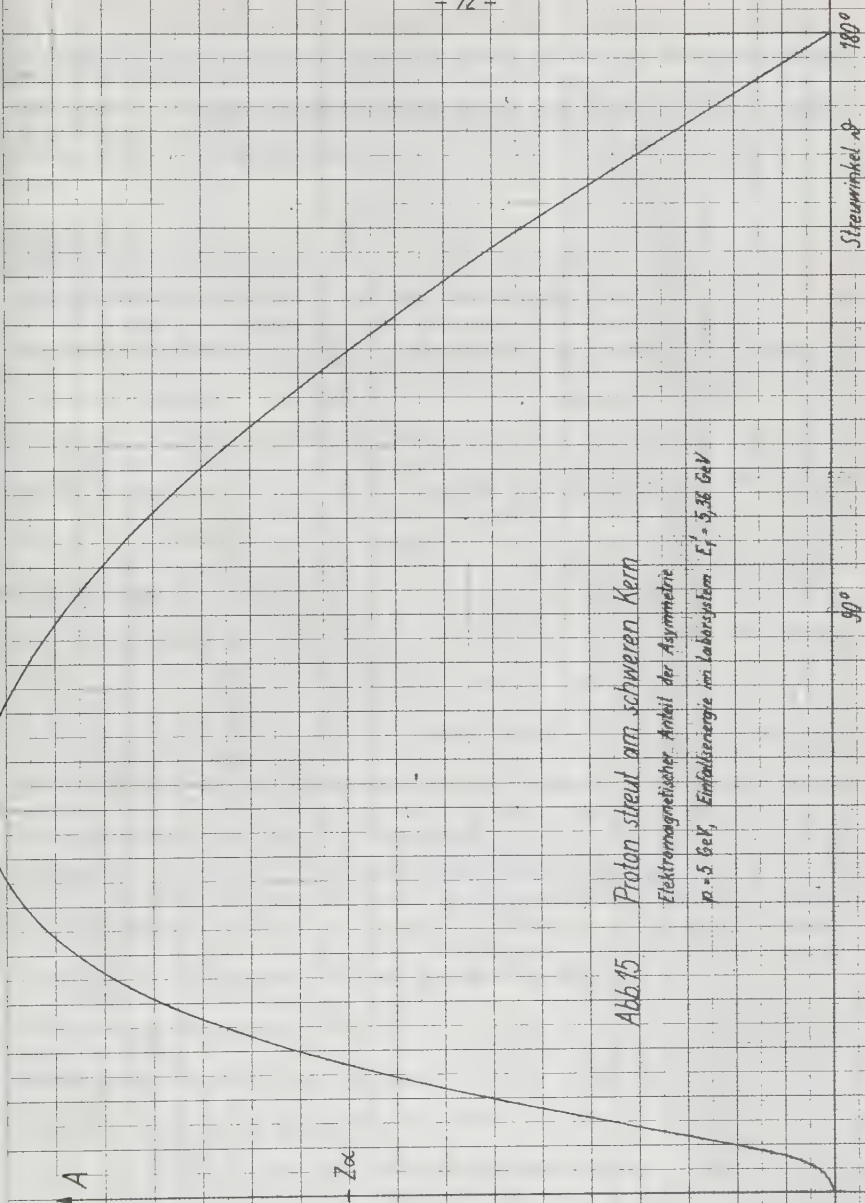


Abb. 15 Proton streut am schweren Kern

Elektromagnetischer Anteil der Asymmetrie

$p = 5 \text{ GeV}$, Einfallenergie im Laborsystem $E_f = 5.38 \text{ GeV}$

Streuwinkel 2α

tion einen nicht geringen Beitrag, für $Z = 45$ ist im Maximum $A=0,2865$. Vorausgesetzt ist allerdings hierbei reine Punktförmigkeit der elektrischen Ladung, bei einer Struktur von Proton und Targetkern muß bei den hohen Energien noch mit den beiden Faktoren (Ladung im "hard core" des Protons) : (Gesamtladung des Protons) und (Ladung im "hard core" des Kerns) : (Gesamtladung des Kerns) multipliziert werden.

Um mit der Formel (33) den Gesamteffekt darzustellen, könnten wir in Übereinstimmung mit der Näherung (32) mit der Energie heruntergehen. Wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte trägt dann mehr und mehr nur die elektromagnetische Wechselwirkung zum Effekt bei. Es wird aber dabei wegen $\beta \rightarrow 0$ der Entwicklungsparameter $\frac{Z\alpha}{\beta}$ groß und die Bornsche Näherung schlecht.

3. Bei sehr hohen Energien und damit sehr großen Energie-Impuls-Übertragungen geht für das Proton

$$(5.34) \quad F_1(q^2) \rightarrow (1 - \eta_1 \eta_2)$$

$$(5.35) \quad F_2(q^2) \rightarrow 0$$

Dann stellt die einfache Formel (10) mit dem Faktor (34) den elektromagnetischen Anteil der Streuung des Protons am Spin-0-Target dar:

$$(5.36) \quad A = \frac{2(1-\eta_1\eta_2)m_1 p Z\alpha \{ (2E_1+E_2)M_2^2 + 2p^2(E_1+E_2) \} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tan^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{|\vec{E}_1+\vec{E}_2|^2 \{ p^2(E_1+E_2)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2 \}}$$

(36) wird für sehr hohe Energien, (größenordnungsmäßig $p \geq 1$ GeV) richtig sein. Nach (36) ist also die Asymmetrie aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung maximal $(1-\eta_1\eta_2) \frac{1}{2} Z\alpha$, wobei eine "Struktur" nur für eines der beteiligten Teilchen angenommen ist. Andernfalls ist noch mit dem Verhältnis (Ladung im "hard core") : (Gesamtladung) des anderen Teilchens zu multiplizieren.

6. Kapitel. Berechnung der Streuung am Spin-1/2-Target.

6.1 Streuung eines Diracteilchens

Wie im Falle der Streuung am Spin-0-Target gelten die Formeln

$$(6.1) \quad A = \frac{a_y(k,p)}{a(k,p)}$$

Dabei ist

$$(6.2) \quad a(k,p) = \text{Sp} [P(k) M_1(k,p) P(p) \bar{M}_1(k,p)]$$

$$(6.3) \quad a_y(k,p) = - \frac{E_1 E_2 p}{|E_1 E_2|} \int d\Omega_q \text{Sp} [\gamma^5 \gamma^2 P(p) M_1(p,k) P(k) M_1(k,q) P(q) M_1(q,p)]$$

Anders als beim Spin-0-Target sind aber die in (2) und (3) symbolisch angeschriebenen Spuren Produkte von Spuren im Spinraum des einfallenden "Elektrons" mit Spuren im Spinraum des Targetteilchens.

Für $a(k,p)$, das bis auf kinematische Faktoren den Wirkungsquerschnitt darstellt, gilt nach (2.33)

$$(6.4) \quad a(k,p) = - \left\{ \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{E_1 E_2} \right\} \frac{1}{4p^4} \frac{F^2(q^2)}{(1-\vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)^2} \cdot K_{\frac{1}{2}}$$

$$(6.4a) \quad K_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \text{Sp} [(-i\hat{k}_1 + m_1) \gamma^u (-i\hat{p}_1 + m_1) \gamma^v] \cdot \frac{1}{4} \text{Sp} [(-i\hat{k}_2 + M_2) \gamma_u (-i\hat{p}_2 + M_2) \gamma_v] \\ = 4 \left[p^2 (E_1 E_2)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2 + 2p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \right]$$

Aus (4) und (4a) erhält man den Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem

$$(6.5) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze)^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{F^2(q^2)}{p^4 (1-\vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)^2} \left[(E_1 + E_2)^2 p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2 + 2p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \right]$$

Die Formel gilt gleichermaßen für eine Ladungsstruktur des einfallenden Diracteilchens wie für eine Struktur des Targetteilchens. Voraus-

gesetzt ist, daß wenigstens eines der beiden Teilchen punktförmig ist. Andernfalls käme in (5) statt $F^2(q^2)$ das Produkt aus den Quadraten der Strukturfunktion zu stehen. Im Falle punktförmiger Teilchen ist natürlich wieder

$$(6.6) \quad F(q^2) \equiv 1$$

Für $\bar{a}_y(pk, q)$ hat man nach (3) und (2.33)

$$(6.7) \quad \bar{a}_y(p, k, q) = \frac{2\pi p E_1 E_2}{|E_1 + E_2|} \left\{ -i \frac{k^2}{(2\pi)^2} \frac{m_1 M_2}{E_1 E_2} \right\}^3 \cdot \frac{1}{8p^6} \cdot \\ \cdot \frac{F[(p-k)^2]}{(1-\vec{p}_0 \vec{k}_0)} \cdot \frac{F[(p-q)^2]}{(1-\vec{p}_0 \vec{q}_0)} \cdot \frac{F[(k-q)^2]}{(1-\vec{k}_0 \vec{q}_0)} \cdot \frac{2}{m_1^3} \cdot L_{\frac{1}{2}}$$

$$(6.7a) \quad L_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \text{Sp} [\gamma^5 \gamma^2 (-i\hat{p} + m_1) \gamma^5 (-i\hat{k} + m_1) \gamma^4 (-i\hat{q} + m_1) \gamma^3] \cdot \\ \cdot \frac{1}{4} \text{Sp} [(\hat{p}_1 + iM_2) \gamma_3 (\hat{k}_2 + iM_2) \gamma_4 (\hat{q}_2 + iM_2) \gamma_5]$$

Die Auswertung von $L_{\frac{1}{2}}$ liefert

$$(6.8) \quad 4m_1 \{ (2E_1 + E_2) M_2^2 \bar{f}_1(\vartheta) - (E_1 + E_2) p^2 [\bar{f}_1(\vartheta) + \bar{f}_2(\vartheta)] \\ - E_2 p^2 \bar{f}_1(\vartheta) + E_2 \bar{f}_1(\vartheta) \cdot \vec{k} \cdot \vec{q} \}$$

Der letzte Term in (8) läßt sich nicht in Form der Asymmetriefunktionen $\bar{f}_n(\vartheta)$ schreiben. Er rührt deshalb (wie wir in Kapitel 4 gesehen haben) vom Spinumklapp her, der die Symmetrie gegen die Permutationsgruppe in $\vec{p}, \vec{k}, \vec{q}$ stört. Man sieht, wie in Kapitel 4 allgemein abgeleitet, daß bei diesem Term noch die Symmetrie gegen die Transposition B (Vertauschung von k und q) erhalten geblieben ist.

Die Integration des Zusatztermes kann man einfach durch Symmetrie-

erzielen, da ja das Integral etwa nach (1.31) in $\vec{p}$ und $\vec{k}$ symmetrisch ist. Davon überzeugt man sich auch durch direkte Rechnung.

$$6.9) \quad 2m_1 E_2 (\vec{p}_0 \vec{q}_0 + \vec{k}_0 \vec{q}_0) \bar{f}_1(\vartheta) = 2m_1 E_2 \bar{f}_4(\vartheta) - 4m_1 E_2 \bar{f}_1(\vartheta) \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

o erhalten wir für (8)

$$6.10) \quad L_{\frac{1}{2}} = 4m_1 \{ (2E_1 + E_2) M_2^2 \bar{f}_1(\vartheta) - (E_1 + E_2) p^2 [\bar{f}_1(\vartheta) + \bar{f}_2(\vartheta)] + \frac{1}{2} E_2 p^2 \bar{f}_4(\vartheta) - E_2 p^2 (1 + \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) \bar{f}_1(\vartheta) \}$$

Aus (1), (2), (4a) und (7), (10) folgt für die gesuchte Asymmetriegröße bei der Streuung zweier Diracteilchen nunmehr

$$6.11) \quad A = - \frac{m_1 p^2 \alpha \{ (2E_1 + E_2) M_2^2 f_1(\vartheta, s) - (E_1 + E_2) p^2 [f_1(\vartheta, s) + f_2(\vartheta, s)] + \frac{E_2}{2} p^2 f_4(\vartheta, s) - E_2 p^2 (1 + \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) f_1(\vartheta, s) \}}{4 |E_1 + E_2| \{ p^2 (E_1 + E_2)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2 + 2 p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \} s(\vartheta, s)}$$

Für den Fall, daß beide beteiligten Teilchen keine Struktur aufweisen, geht (11) über in

$$6.12) \quad A = - \frac{2Z\alpha m_1 p \{ (2E_1 + E_2) M_2^2 \ln \sin \frac{\vartheta}{2} + E_2 p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tan \frac{\vartheta}{2}}{|E_1 + E_2| \{ p^2 (E_1 + E_2)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2 + 2 p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \}}$$

Der Ausdruck (12), der die Struktur nicht berücksichtigt, wurde bereits von Barut und Fronsdal 1960 angegeben. Physikalisch gilt (11) bzw. (12) für die Streuung eines Elektrons am μ -Meson oder für die Streuung eines Elektrons oder μ -Mesons an Atomkernen mit Kernspin $\frac{1}{2}$ ohne anomales Moment. Wie wir in Abschnitt 5.2 bereits erwähnten, spielt in letzterem Falle wegen der sehr großen Kernmasse der Spin i.a. keine Rolle. (Eine Diskussion folgt im nächsten Abschnitt.)

5.2 Vergleich mit der Streuung am Spin-0-Target

Die beiden Formeln (4) vom Kapitel 5 und Kapitel 6 für $a(k, p)$ unterscheiden sich um einen Faktor 2 ebenso wie die entsprechenden Formeln für $\bar{a}_y(p, k, q)$.

Deshalb lauten in beiden Fällen die Wirkungsquerschnitte

$$(6.13) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(\mathcal{Z}\alpha)^2}{(E_1+E_2)^2} \cdot \frac{F^2(q^2)}{(1-\vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)^2} \cdot \frac{1}{4p^*} \cdot K$$

und die Asymmetrie

$$(6.14) \quad A = - \frac{p\mathcal{Z}\alpha}{4|E_1+E_2|} \cdot \frac{L}{K} \cdot \frac{(1-\vec{p}_0 \cdot \vec{k}_0)}{F(q^2)}$$

Für den Targetspin 0 haben wir in (13) und (14) K_0 und L_0 nach (5.4a) und (5.7a) und für den Targetspin $\frac{1}{2}$ $K_{\frac{1}{2}}$ und $L_{\frac{1}{2}}$ nach (4a) und (7a) zu nehmen:

$$(6.15) \quad K_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \gamma_{p_1}(\mu, \nu) \frac{1}{4} \gamma_{p_2} [(-i\hat{k}_2 + M_2) \gamma_\mu (-i\hat{p}_2 + M_2) \gamma_\nu]$$

$$(6.16) \quad K_0 = \frac{1}{4} \gamma_{p_1}(\mu, \nu) \frac{1}{2} (p_2 + k_2)_\mu (p_2 + k_2)_\nu$$

$$(6.17) \quad L_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \gamma_{p_1}(s_1, \mu, \nu) \frac{1}{4} \gamma_{p_2} [(-i\hat{p}_2 + M_2) \gamma^5 (-i\hat{k}_2 + M_2) \gamma_\mu (-i\hat{q}_2 + M_2) \gamma_\nu]$$

$$(6.18) \quad L_0 = \frac{1}{4} \gamma_{p_1}(s_1, \mu, \nu) \frac{1}{2} (p_2 + k_2)_\mu (k_2 + q_2)_\nu (p_2 + q_2)_\nu$$

$K_{\frac{1}{2}}$ und $L_{\frac{1}{2}}$ sind Produktsummen von zwei Spuren, die eine über die Größen des einfallenden Teilchens, die andere über die Größen des Targetteilchens. Die Spuren über das einfallende Teilchen

$$(6.19) \quad \frac{1}{4} \gamma_{p_1}(\mu, \nu) = \frac{1}{4} \text{Sp} [(-i\hat{k}_2 + m_1) \gamma^\mu (-i\hat{p}_2 + m_1) \gamma^\nu]$$

$$(6.20) \quad \frac{1}{4} \gamma_{p_1}(s_1, \mu, \nu) = \frac{1}{4} \text{Sp} [\gamma^5 \gamma^2 (-i\hat{p}_2 + m_1) \gamma^3 (-i\hat{k}_2 + m_1) \gamma^4 (-i\hat{q}_2 + m_1) \gamma^\nu]$$

sind ganz unabhängig von der Natur des Targetteilchens, treten also in allen Fällen auf, ob nun das Target ein Spin-1/2-Teilchen, ein Spin-0-Teilchen (oder ein äußeres Feld) ist.

Setzen wir nun (vorübergehend) voraus, daß die Masse des Targetteilchens sehr groß ist gegenüber dem Dreierimpulsbetrag im Schwerpunktsystem (oder auch Masse des Targetteilchens groß gegen die Einfallensenergie des Elektrons, was dasselbe ist)

$$(6.21) \quad M_2 \approx E_2 \gg p$$

so stimmen die Größen $\mathcal{P}_2(\mu, \nu)$ für Spin-0-Target und Spin-1/2-Target und auch $\mathcal{P}_2(1/2, \mu, \nu)$ für beide Targets (wie man leicht durch Auswertung erkennt) in den beiden höchsten Potenzen in M_2 überein: Bei sehr schwerer Targetmasse spielt der Spin des Targets keine Rolle.

Im Asymmetrierausdruck (12) rühren also die beiden ersten Glieder in der geschweiften Klammer

$$(6.22) \quad (2E_1 + E_2) M_2^2 \ln \sin \frac{\vartheta}{2},$$

die genau den beiden ersten Termen in (5.10) für die Streuung am Spin-0-Target entsprechen, von der Spin-Bahnpkopplung her. Der letzte Term in der geschweiften Klammer von (12) kommt, wie gesagt, von der Spin-Spin-Wechselwirkung und zwar vom Spin-Umklapp.

Die im Kapitel 5 bei der Diskussion der Formeln (5.9) und (5.10) für die Asymmetrie entwickelten Vorzeichenregeln - man vergleiche Abb. 12 - gelten hier nur noch in der Näherung (21). Für sehr hohe Impulse p überwiegt der letzte Term in der geschweiften Klammer von (12), und die Mottasymmetrie kehrt ihr Vorzeichen um. In diesem Fall kommt der Hauptbeitrag zum Effekt vom Spin-Umklapp; der Mechanismus ist für Spin-1/2-Target und hohe Impulse ein wesentlich anderer als wir ihn für die Streuung am Spin-0-Target (Abb. 11) geschildert haben. Beim Durchgang durch das Biot-Savartsche Magnetfeld stellen sich die magnetischen Momente der Elektronen bevorzugt in Feldrichtung, die Spins also gegen die Feldrichtung ein. Aufgrund dieses Mechanismus sieht man also, wenn man in die Richtung des Primärstrahles blickt, bei den nach links gestreuten Elektronenstrahlen die Spins bevorzugt nach oben stehen. Der in Kapitel 5 (Abb. 12) geschilderte Mechanismus hatte gerade

zum umgekehrten Vorzeichen geführt.



Abb. 16. Drehung der magnetischen Momente in die Magnetfeldrichtung (klassisches Modell). Vorzeichenregel für die Asymmetrie.

Betrachtet man also das Vorzeichen der Asymmetrie bei der Streuung an einem Spin-1/2-Target, so ist das Vorzeichen für kleine p dasselbe wie bei einem Spin-0-Target, bei sehr hohen Impulsen p gerade das umgekehrte. Diese Vorzeichenumkehr der Mottasymmetrie wollen wir für den Fall punktförmiger Teilchen, bei denen (12) gilt, genauer betrachten.

Die Mottasymmetrie kann von den trivialen Fällen abgesehen nur Null werden, wenn die geschweifte Klammer im Zähler von (12) verschwindet:

$$(6.23) \quad (2E_1 + E_2) M_2^2 \ln \sin \frac{\vartheta_0}{2} + E_2 p^2 \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} = 0$$

Mit

$$(6.24) \quad z = \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad ; \quad d = \frac{2E_2 p^2}{M_2^2 (2E_1 + E_2)}$$

führt (23) zur transzendenten Gleichung

$$(6.25) \quad \ln z_0 = d (z_0 - 1)$$

Eine nichttriviale Lösung $0 < z < 1$ erhalten wir dann und nur dann, wenn $d > 1$, weil in diesem Fall die durch $z = 1$ gehende Gerade $y = d(z-1)$ mit dem Steigungsfaktor d einen Schnittpunkt $0 < z < 1$ mit der Kurve $y = \ln z$ hat. Die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Nullstelle ist also

$$(6.26) \quad d = \frac{2E_2 p^2}{M_2^2 (2E_1 + E_2)} > 1$$

oder

$$(6.27) \quad 2E_2 p^2 > M_2^2 (2E_1 + E_2)$$

Für Impulse, die kleiner sind als ein bestimmter Grenzpuls p_g , ist die Relation (27) bzw. (26) nicht erfüllt. Das Vorzeichen der Mott-asymmetrie ist für alle Winkel einheitlich und das gleiche wie bei einer Streuung an einem Spin-0-Target; es ist nach dem Mechanismus von Abb. 12 festgelegt. Wenn p größer ist als der Grenzpuls, also bei Erfüllung der Ungleichung (27), haben wir für $\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = z < z_0$ wegen Überwiegen des ersten Terms in (23) dasselbe Vorzeichen wie beim Target-spin 0, für $\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = z > z_0$ aber das entgegengesetzte Vorzeichen.

Diesen Grenzpuls p_g finden wir durch Lösung der Gleichung

$$(6.28) \quad 2E_2 p^2 = M_2^2 (2E_1 + E_2)$$

Durch umordnen und quadrieren wird man auf die Gleichung geführt

$$(6.29) \quad 4p^6 - 7p^2 M_2^4 + M_2^4 (M_2^2 - 4m_1^2) = 0$$

Die hier allein interessierende Nullstelle ist bei Messung der Elektronenpolarisation wegen $m_1^2 \ll M_2^2$

$$(6.30) \quad p_g = 1,116 M_2,$$

die den erwähnten "Grenzpuls" festlegt.

Es zeigt sich, daß mit wachsendem $p > p_g$ die Nullstelle ϑ_0 rasch zu sehr kleinen Winkeln abwandert und deshalb bei höheren p praktisch einheitlich das entgegengesetzte Vorzeichen wie im Fall $p < p_g$ vorliegt; der Mechanismus des Streuvorganges wird dann durch Abb. 16 beschrieben.

Elektron- μ^+ -Meson-Streuung.

$p = 50$	MeV	$d = 0,231$	-	$A > 0$	einheitlich
$p = 117,9$	MeV	$d = 1$	-	$A > 0$	einheitlich
$p = 150$	MeV	$d = 1,53$	$\vartheta_0 = 78^\circ$; für $\vartheta < \vartheta_0$	$A > 0$,	sonst negativ
$p = 500$	MeV	$d = 15,15$	$\vartheta_0 \approx 10^{-3}$; praktisch	$A < 0$	einheitlich

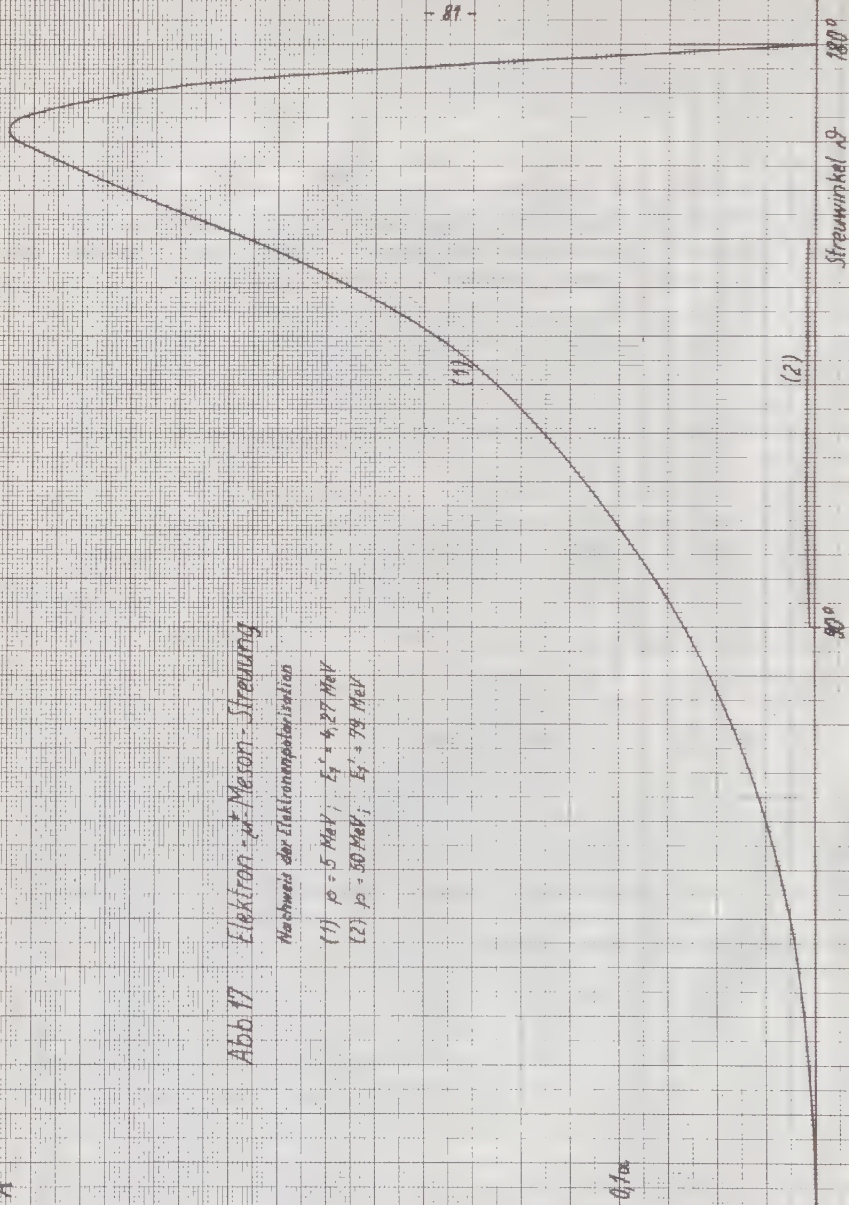
A

Abb. 17 Elektron- μ -Meson-Streuung

Nachweis der Elektronpolarisation

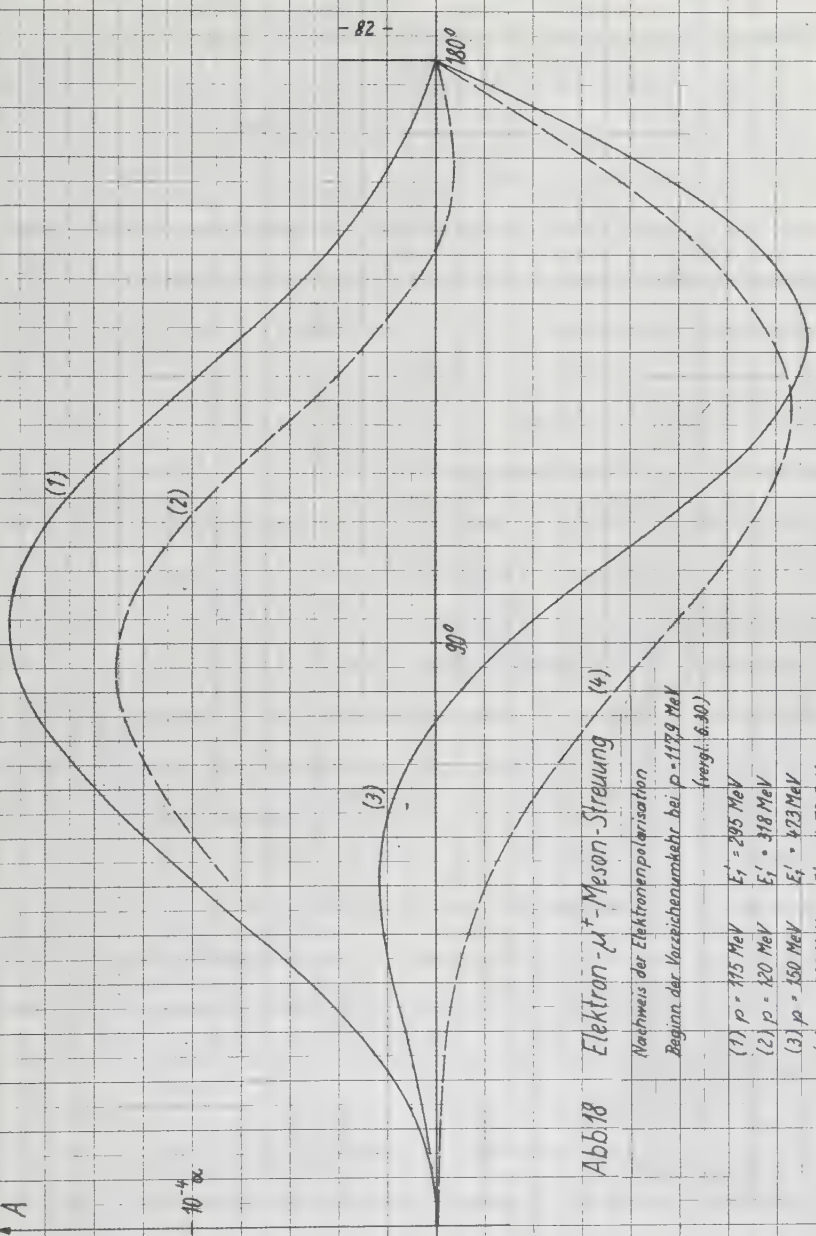
(1) $p = 5 \text{ MeV}; E_1' = 4,27 \text{ MeV}$

(2) $p = 50 \text{ MeV}; E_1' = 28 \text{ MeV}$



A

10^{-4}



- 82 -

180°

90°

Abb. 18 Elektron- μ^+ -Meson-Streuung (4)

Nachweis der Elektronenpolarisation

Beginn der Vorzeichenumkehr bei $p = 117.9 \text{ MeV}$
(vergl. 6.30.)

- (1) $p = 115 \text{ MeV}$ $E_1' = 295 \text{ MeV}$
- (2) $p = 120 \text{ MeV}$ $E_1' = 318 \text{ MeV}$
- (3) $p = 150 \text{ MeV}$ $E_1' = 473 \text{ MeV}$
- (4) $p = 500 \text{ MeV}$ $E_1' = 4.78 \text{ GeV}$

A

Abb 19

Elektron- μ^+ -Meson-Streuung

Die Polarisation des Rückstoßmesons

Vorzeichenumkehr (bei $p = 3,02 \text{ MeV}$) und Wideranstieg mit wachsender Energie

- (1) $p = 1 \text{ MeV}$
- (2) $p = 5 \text{ MeV}$
- (3) $p = 50 \text{ MeV}$

Streuungswinkel ϑ

180°

90°

83

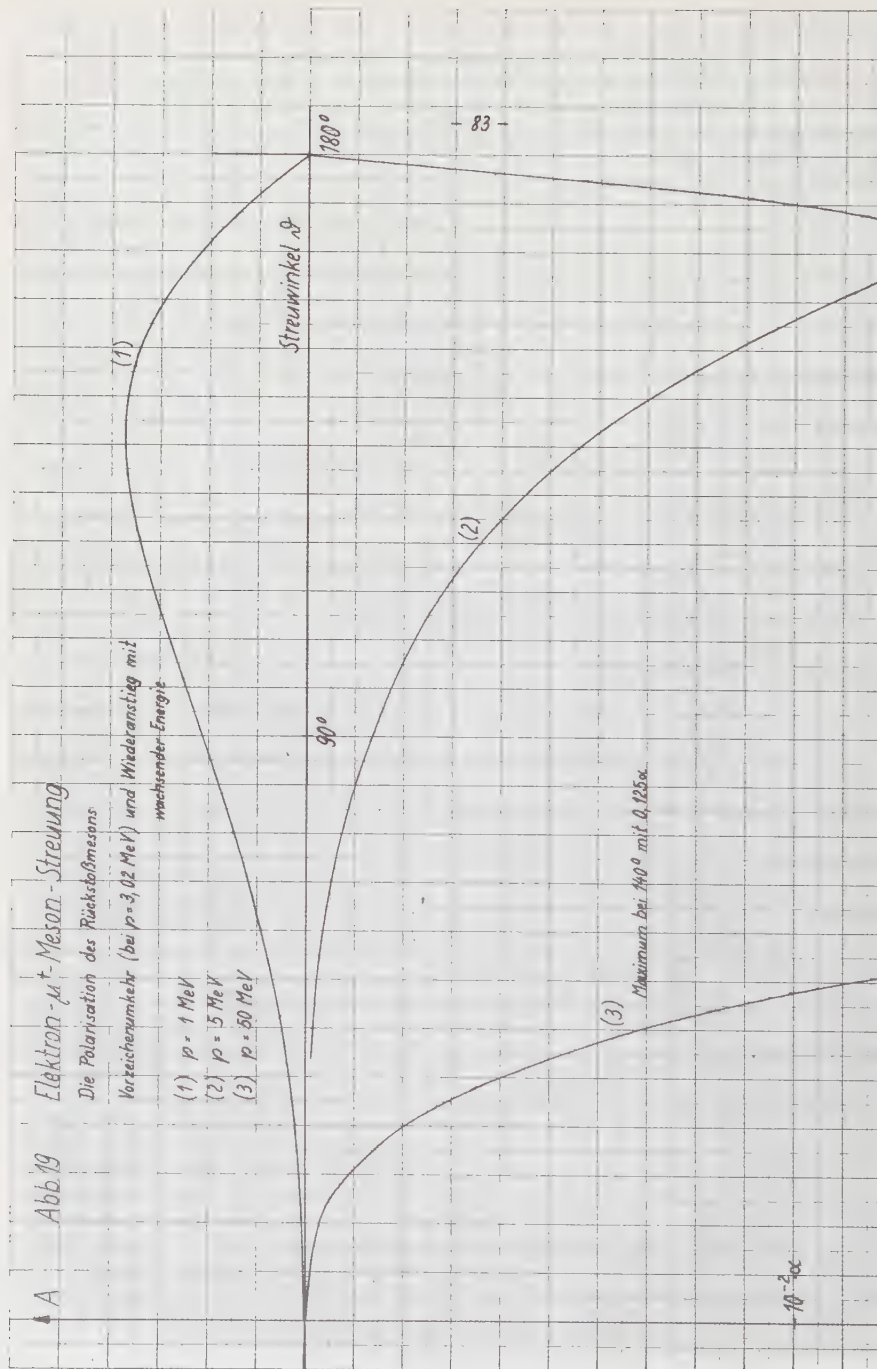
(3)

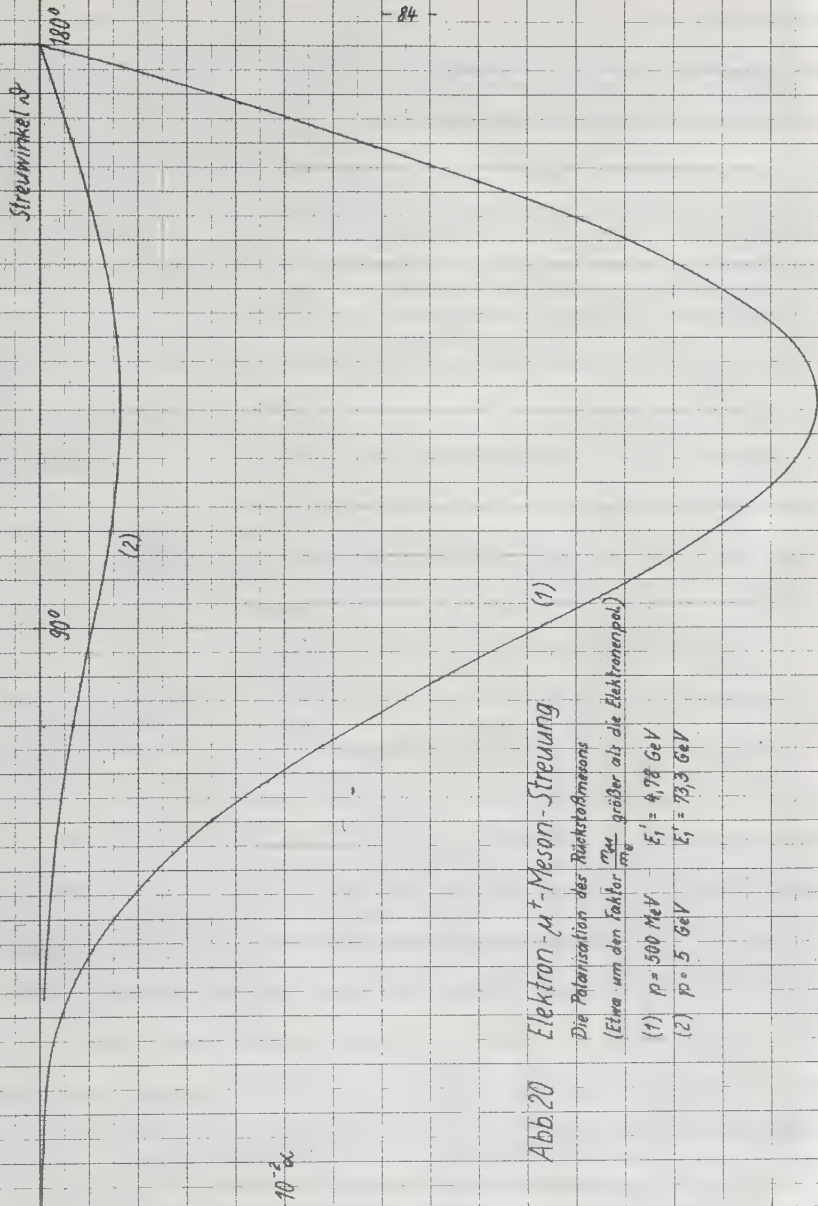
Maximum bei 140° mit 0,125α

10⁻²α

(2)

(1)





Diese Werte, die wir aus (24), (30) und durch Lösung von (25) erhalten, bestätigen wir durch direkte Auswertung von (11) mit unserem elektronischen Rechenprogramm. (Man vergleiche hierzu die Abb. 17 und 18.)

Führt man die Messung der Polarisierung am schweren Rückstoßteilchen mit der Masse M_2 durch, so hat man wegen der Gleichberechtigung beider Diraceteilchen im Schwerpunktsystem einfach Teilchen 1 und 2 zu vertauschen. Wieder gilt dann (11) und (12), aber nun mit vertauschten Massen und Energien. Statt (6.29) gilt dann

$$(6.31) \quad 4p^6 - 7p^2 m_1^4 + m_1^4 (m_1^2 - 4M_2^2) = 0$$

Mit $m_1 \ll M_2$ folgt sofort

$$(6.32) \quad p = \sqrt[3]{M_2 m_1^2}$$

Der Grenzimpuls liegt bei der Polarisationsmessung am schweren Rückstoßteilchen viel niedriger als bei der Messung am Elektron. (Abb. 19 u. 20)

$e-\mu$ -Streuung, Messung der μ -Polarisation

$p = 3,02$ MeV	$d = 1$	$\vartheta_0 = 12^\circ$	$A > 0$ einheitlich
$p = 5$ MeV	$d = 4,44$	$\vartheta_0 = 12^\circ$; für $\vartheta < \vartheta_0$	$A > 0$, sonst negativ
$p = 10$ MeV	$d = 34,5$	$\vartheta_0 \approx 10^{-7}$; praktisch	$A < 0$ einheitlich

Für Impulse p , die viel größer sind als der durch (30) gegebene Grenzimpuls p_g , also bei der $e-\mu$ -Streuung für $p \gg 117,9$ MeV, ist nach (26) das mit dem Logarithmus behaftete erste Glied im Zähler der Mottasymmetrie (11) gegenüber dem zweiten zu vernachlässigen. Für diese Impulse kann man das Verhältnis μ -Mesonen- zu Elektronenpolarisation leicht abschätzen. Die Elektronen-Asymmetrie ist mit m_e Masse Elektron und m_μ Masse μ -Meson

$$A \sim m_e p^3 E_\mu \sim m_e p^4$$

und die μ -Mesonen-Asymmetrie

$$A \sim m_{\mu} p^3 E_e \sim m_{\mu} p^4$$

Der Effekt ist also für sehr große p bei der Messung am μ -Meson um einen Faktor $\frac{m_{\mu}}{m_e} = 207$ größer als bei der Messung am Elektron. Unsere numerische Auswertung bestätigt diese Abschätzung.

Asymmetrie in Einheiten $10^{-3}\alpha$ für p = 500 MeV

Winkel	μ -Mesonenpol.	Elektronenpol.	Verhältnis
30°	- 0,9153	-0,003659	250
60°	- 7,0889	-0,030766	230
90°	-20,5354	-0,092219	223
120°	-31,6108	-0,144386	219
125° (Maximum)	-31,9217	-0,146080	218,5
150°	-24,1942	-0,111423	217

Asymmetrie in Einheiten $10^{-3}\alpha$ für p = 5 GeV

30°	- 0,0946	-0,000457	207
60°	- 0,7318	-0,003535	207
90°	- 2,1125	-0,010209	207
120°	- 3,2287	-0,015606	207
125° (Maximum)	- 3,2560	-0,015739	207
150°	- 2,4530	-0,011858	207

6.3 Die Elektron - Proton - Streuung.

Aus den Messungen von Hofstadter (Hofstadter 1961) geht hervor, daß $F_2(q^2)$ - die Strukturfunktion, die die Ausdehnung des anomalen Momentes angibt - für große Energie-Impulsübertragungen q^2 nach Null geht. Damit ist für $F_2(q^2)$ der Faktor $(1-\eta_1-\eta_2) = 0$, und es verschwindet

$$T_n(\omega, s) = \frac{f_n(\omega, s)}{s(\omega, s)}$$

nach (4.51). Deshalb wird (für einen festgehaltenen Winkel) das anomale Moment überhaupt vernachlässigbar, wenn ein bestimmter Schwerpunktim-puls (bzw. Einfallenergie) überschritten wird.

Die Messungen (Hofstadter 1961) zeigen, daß für $q^2 = 16f^{-2}$ $F_2(q^2)$ bereits (von 1) auf etwa 0,18 abgesunken ist, für $q^2 = 25f^{-2}$ bereits auf ~ 0 . Wählen wir nun einen Schwerpunktswinkel von 90° , so bedeutet $q^2 = 16f^{-2}$ $p \sim 460$ MeV. Mit den Hofstadterschen Werten für die Struktur ergibt sich damit $a = 1,37$ und $b = 1,78$. Unter Vernachlässigung des Einflusses des Streuwinkels schätzen wir grob ab, daß von etwa $p = 500$ MeV an das Proton als Diraceteilchen ohne anomales Moment aufgefaßt werden kann. Es gilt also Gleichung (11) mit noch beliebiger Struktur $F_1(q^2)$. Da aber in derselben Näherung, in der $F_2(q^2)$ verschwindet, $F_1(q^2)$ praktisch konstant geworden ist, haben wir die einfachere Formel mit $(1 - \eta_1 - \eta_2)e$ als Ladung im "hard core"

$$(6.33) \quad A = \frac{2(1 - \eta_1 - \eta_2) \alpha m_1 \rho \{ (2E_1 + E_2) M_2^2 \ln \sin \frac{\vartheta}{2} + E_2 \rho^2 \omega^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tan \frac{\vartheta}{2} \}}{|E_1 + E_2| \{ \rho^2 (E_1 + E_2)^2 \omega^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + m_1^2 M_2^2 + 2\rho^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \}}$$

Als Grenzpuls p_g hat man nach (30) hier $p_g = 1046$ MeV. So erhalten wir ähnliche Vorzeichenregeln für die Mottasymmetrie wie bei der $e-\mu$ -Streuung.

Elektron-Proton-Streuung

(Das Proton als Diraceteilchen behandelt.)

$p = 500$ MeV,	$d = 0,312$	-	$A > 0$ einheitlich
$p = 1046$ MeV,	$d = 1$	-	$A > 0$ einheitlich
$p = 1100$ MeV,	$d = 1,091$	$\vartheta_0 = 132^\circ 32'$; für $\vartheta < \vartheta_0$	$A > 0$, sonst negativ
$p = 5000$ MeV,	$d = 19,16$	$\vartheta_0 \approx 10^{-4}$	$A < 0$ einheitlich

Die numerische Auswertung von (33) zeigt sehr kleine Asymmetrien (man vergl. auch Abb. 21).

Asymmetrie in Einheiten $10^{-3} \alpha$

	Maximum	Minimum
$p = 500$ MeV	0,3918	-
$p = 1000$ MeV	0,0226	-
$p = 1046$ MeV	0,0167	-
$p = 1100$ MeV	0,0117	-0,0031
$p = 5000$ MeV	-	-0,0148

Statt der Elektronenpolarisation (33) kann man auch die Messung der Polarisation des Rückstoßprotons durchführen. Da bei den hier zur Diskussion stehenden hohen Energien das Proton als Diraceteilchen behandelt werden kann, sind im Schwerpunktsystem beide Teilchen gleichberechtigt. Die Protonenpolarisation erhält man also einfach wieder aus (33), indem man Teilchen 1 und 2 miteinander vertauscht. Für Impulse $p \gg p_g$, für die also nach Abschnitt 6.2 das erste Glied in der geschweiften Klammer des Zählers von (33) von geringem Einfluß ist, erhält man genau wie im Fall e- μ -Streuung als Verhältnis der Protonen- zur Elektronenpolarisation das Massenverhältnis $\frac{M_p}{m_e} = 1836$. Unsere numerische Auswertung bestätigt diese Abschätzung.

Asymmetrie in Einheiten $10^{-3}\alpha$ für $p = 5 \text{ GeV}$

Winkel	Protonenpol.	Elektronenpol.	Verhältnis
30°	- 0,8182	-0,000385	2125
60°	- 6,3373	-0,003137	2017
90°	-18,3448	-0,009430	1945
120°	-28,1964	-0,014686	1920
125° (Maximum)	-28,4655	-0,014847	1916
150°	-21,5472	-0,011295	1907

Während (33) nur für hohe Impulse p richtig ist, hat man für kleinere p das anomale Moment des Targets zu berücksichtigen. Es gelten dabei wieder die Formeln (1), (2), (3), (4) und (7), aber statt (4a) haben wir nun

$$(6.34) \quad K_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \operatorname{Sp} [(-i\hat{k}_2 + m_1) \gamma^u (-i\hat{p} + m_1) \gamma^v] \cdot \\ \cdot \frac{1}{4} \operatorname{Sp} [(-i\hat{k}_2 + M_2) \{ F_1 \gamma_u + \frac{i\kappa}{2M_2} (\hat{p}_2 - \hat{k}_2) \gamma_u F_2 \} (-i\hat{p}_1 + M_2) \{ F_1 \gamma_v + \frac{i\kappa}{2M_2} (\hat{k}_2 - \hat{p}_1) \gamma_v F_2 \}]$$

Die Auswertung liefert (Merkel 1962)

$$(6.35) \quad K_{\frac{1}{2}} = 4 \left(F_1^2 + \frac{xg^2}{4M_2^2} F_2^2 \right) \{ (E_1 + E_2)^2 p^2 \omega^2 \frac{2g}{2} + m_1^2 M_2^2 + m_1^2 p^2 \sin^2 \frac{2g}{2} \} \\ + 4 (F_1 + \kappa F_2)^2 p^2 \sin^2 \frac{2g}{2} \{ 2p^2 \sin^2 \frac{2g}{2} - m_1^2 \}$$

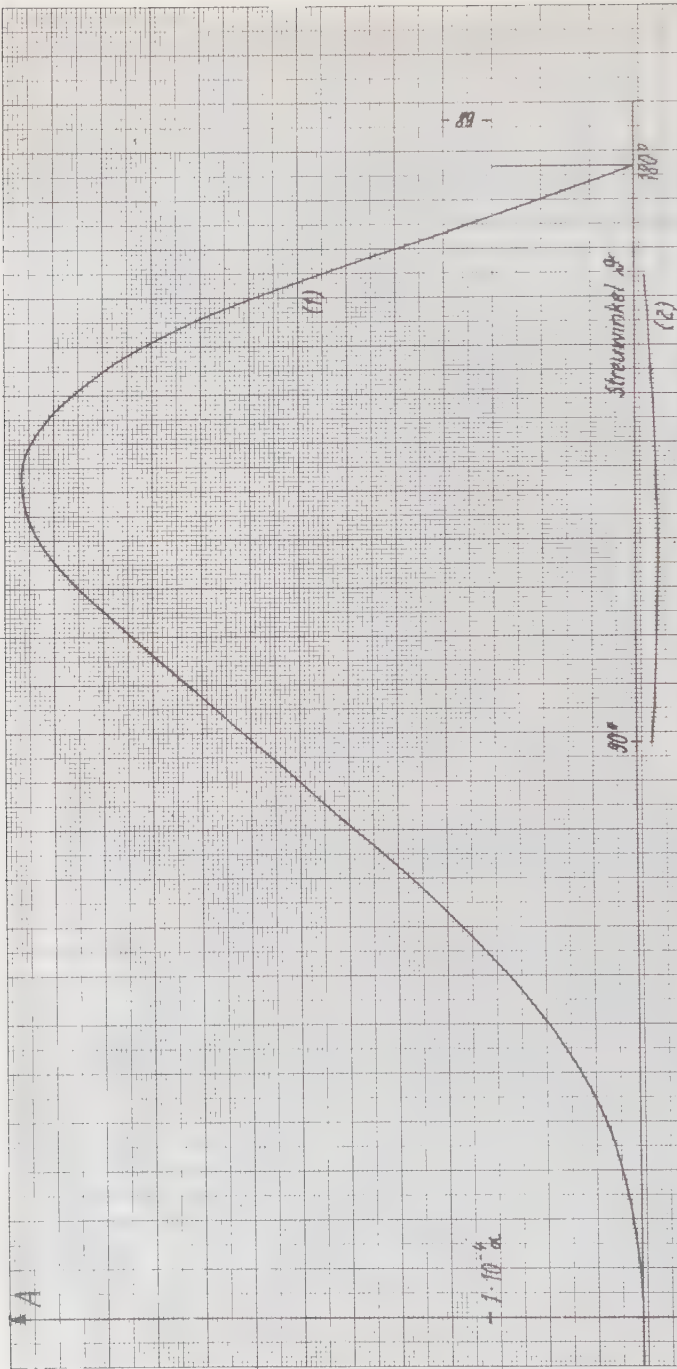


Abb. 21 Elektron-Proton-Streuung, Nachweis der Elektronenpolarisation (punktartige Teilchen).

(1)	$p = 500 \text{ MeV}$	$E_p' = 433 \text{ MeV}$
(2)	$p = 5000 \text{ MeV}$	$E_p' = 437 \text{ GeV}$

A

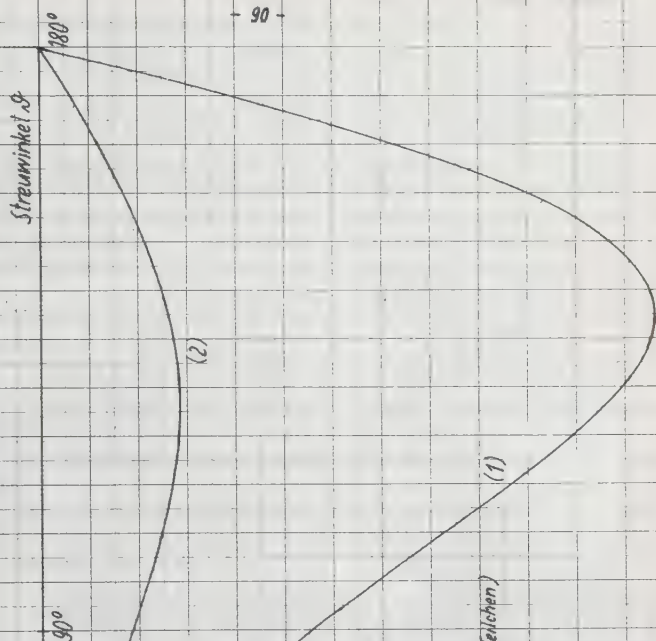


Abb. 22 Elektron - Proton - Streuung

Nachweis der Protonenpolarisation (punkt. Teilchen)

(1)	$p = 500 \text{ MeV}$	$E' = 833 \text{ MeV}$
(2)	$p = 5 \text{ GeV}$	$E' = 53,7 \text{ GeV}$

0.1a

A

$0,1\alpha$

- 91 -

90°

180°

Streuwinkel ϑ

Abb. 23

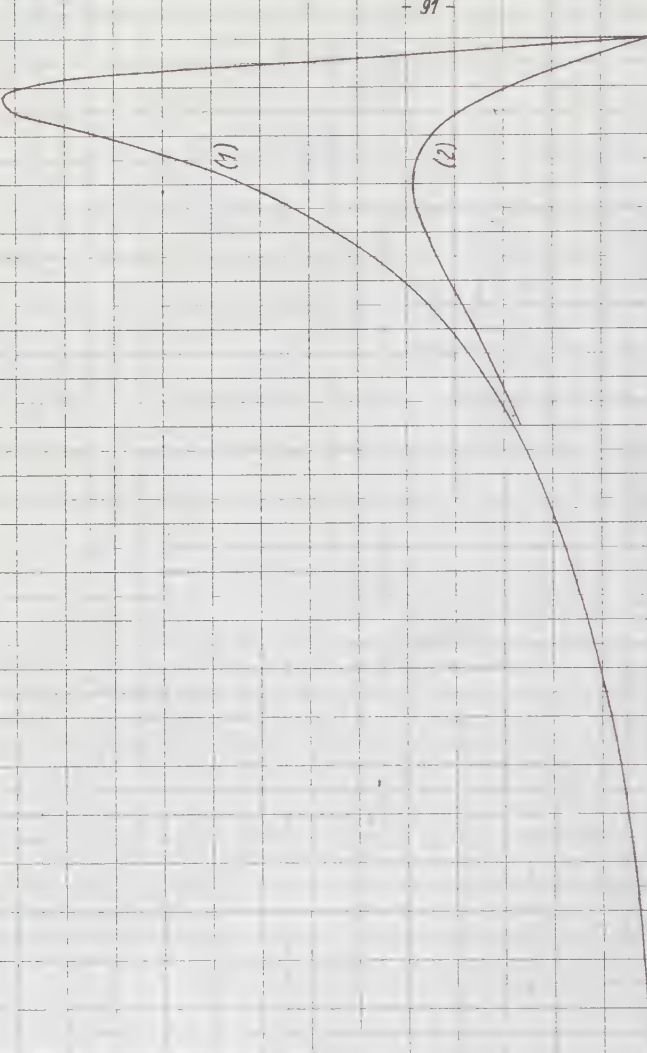
Elektron-Proton-Streuung;

Nachweis der Elektronenpolarisation

(1) Proton als Diracteilchen behandelnd

(2) Mit Berücksichtigung des anomalen Moments

$p = 50 \text{ MeV}$; Laborenergie $E_1 = 52,7 \text{ MeV}$



(Das Argument von F_1 und F_2 ist $(\vec{p}-\vec{k})^2 = q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.) Die Struktur-
funktionen haben wir (anders als im Abschnitt 1) in die Definition von
 $K_{\frac{1}{2}}$ hineingelegt.

Für $a(k, p)$ im Schwerpunktsystem ergibt sich jetzt

$$(6.36) \quad a(k, p) = - \left\{ \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{E_1 E_2} \right\}^2 \frac{1}{16p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot K_{\frac{1}{2}}$$

und für den Wirkungsquerschnitt ($K_{\frac{1}{2}}$ nach (25)) einzusetzen)

$$(6.37) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{K_{\frac{1}{2}}^2}{16p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Das Targetteilchen besitzt dabei das anomale magnetische Moment $\frac{e\kappa}{2M_2}$,
eine Ladungsstruktur, die durch $F_1(q^2)$ und eine Struktur des anomalen
Momentes, die durch $F_2(q^2)$ beschrieben wird.

Wie in Abschnitt 1 gilt für den (nichtintegrierten) Zähler der
Mottasymmetrie

$$(6.38) \quad \bar{a}_y(p, k, q) = - \frac{2\pi p E_1 E_2}{|E_1 + E_2|} \left\{ -i \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{m_1 M_2}{E_1 E_2} \right\}^3 \frac{1}{8p^6} \frac{2 \cdot L_{\frac{1}{2}}}{(1-\vec{p}\vec{k}_0)(1-\vec{k}\vec{q}_0)(1-\vec{p}\vec{q}_0)}$$

$$(6.38a) \quad L_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \gamma p \left[\gamma^5 \gamma^2 (-i\hat{p} + m_1) \gamma^3 (-i\hat{k} + m_1) \gamma^4 (-i\hat{q} + m_1) \gamma^5 \right] \cdot \\ \cdot \frac{1}{4} \gamma p \left[(\hat{p}_2 + iM_2) \left\{ F_1[(p-k)^2] \gamma_5 + \frac{i\kappa}{2M_2} F_2[(p-k)^2] (\hat{p}_2 - \hat{k}_2) \gamma_5 \right\} \cdot \right. \\ \cdot (\hat{k}_2 + iM_2) \left\{ F_1[(k-q)^2] \gamma_4 + \frac{i\kappa}{2M_2} F_2[(k-q)^2] (\hat{k}_2 - \hat{q}_2) \gamma_4 \right\} \cdot \\ \cdot (\hat{q}_2 + iM_2) \left\{ F_1[(p-q)^2] \gamma_5 + \frac{i\kappa}{2M_2} F_2[(p-q)^2] (\hat{q}_2 - \hat{p}_2) \gamma_5 \right\} \left. \right]$$

$L_{\frac{1}{2}}$ werten wir nun unter der Voraussetzung kleiner q^2 aus, so daß
gilt $F_1(q^2) \equiv F_2(q^2)$. Diese Voraussetzung ist (Hofstadter 1961) bis
etwa $q^2 \leq 4f^{-2}$ angenähert erfüllt. Weiter können wir voraussetzen, daß
die Masse des Targetteilchens $M_2 \gg p$ ist. So haben wir nur die höch-
sten Terme in M_2 mitzunehmen: Bei den Gliedern linear in k nur die

Terme proportional M_2^3 und M_2^2 , bei den in κ quadratischen Gliedern die Terme proportional M_2^3 . Die Ausdrücke mit κ^3 sind höchstens von der Ordnung $(\frac{\kappa}{2M_2})^3 M_2^3$, bleiben also gegenüber den berücksichtigten Termen um eine Größenordnung zurück. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 L_{\frac{1}{2}} = & (2E_1 + E_2) M_2^2 \bar{f}_1(\vartheta) - (E_1 + E_2) p^2 [\bar{f}_1(\vartheta) + \bar{f}_2(\vartheta)] \\
 & + \frac{1}{2} E_2 p^2 \bar{f}_4(\vartheta) - E_2 p^2 (1 + \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) \bar{f}_1(\vartheta) \\
 (6.39) \quad & + (\frac{\kappa}{2M_2}) \{ M_2 E_2 p^2 \{ 22 \bar{f}_1(\vartheta) + 4 \bar{f}_2(\vartheta) - 2 \bar{f}_4(\vartheta) \} + 3 M_2 E_2 m_1^2 \bar{f}_1(\vartheta) \} \\
 & - (\frac{\kappa}{2M_2})^2 M_2^2 E_2 p^2 \{ 16 \bar{f}_1(\vartheta) - \bar{f}_4(\vartheta) + 4 \bar{f}_2(\vartheta) \}
 \end{aligned}$$

Ohne Struktur $F_1(q^2) \equiv F_2(q^2) \equiv 1$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4m_1} L_{\frac{1}{2}} = & \tan^2 \frac{\vartheta}{2} [4(2E_1 + E_2) M_2^2 \ln \sin \frac{\vartheta}{2} + 4 E_2 p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \\
 (6.40) \quad & + 4 \kappa E_2 p^2 \{ 7 \ln \sin \frac{\vartheta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} \} \\
 & + 6 \kappa E_2 m_1^2 \ln \sin \frac{\vartheta}{2} \\
 & - 2 \kappa^2 E_2 p^2 \{ 5 \ln \sin \frac{\vartheta}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} \}
 \end{aligned}$$

Um die Asymmetrie zu erhalten, ist (39) bzw. (40) an die Stelle der geschweiften Klammer von (11) zu setzen. Das tun wir in der numerischen Auswertung; an dieser Stelle verzichten wir auf eine explizite Formulierung wegen der Schwerfälligkeit der Formel.

Wir wollen (39) nun insbesondere auf die Elektron-Proton-Streuung anwenden. Das Proton ist dabei das Targetteilchen mit der großen Masse (41) und dem anomalen Moment. Die Spinmessung wird am Elektron durchgeführt. Da in (39) das anomale Moment nur in der Näherung

$$(6.41) \quad E_2 \approx M_2 \gg p \approx E_1$$

berücksichtigt ist, haben wir eine obere Schranke des Gültigkeitsbereichs. Bis zu einer Einfallsennergie von etwa 100 MeV wird damit die

Streuung gut wiedergegeben (Abb. 23).

Nicht behandelt bleibt ein Zwischengebiet von etwa $p = 100$ MeV bis $p = 500$ MeV. Noch wichtiger als eine Aussage über diesen Energiebereich wäre eine Berechnung der Protonenpolarisation für kleinere Impulse p , um den Anschluß an die ab etwa $p = 500$ MeV gültige Relation (33) zu finden. Wir können nämlich erwarten, daß die Protonenpolarisation, die für sehr große p um den Faktor 1836 größer ist als die Elektronenpolarisation, auch im Bereich von 100 MeV weit überwiegen wird. Die Schwierigkeit liegt nur in der Auswertung der Spuren, d.h. in der Rechenarbeit. Wird die Spinnessung an einem Teilchen mit anormalem Moment vorgenommen, haben wir als Spur einen ähnlichen Ausdruck wie (5.27) auszuwerten, anstelle des dortigen einfachen Ausdrucks $(p_2 + k_2)_\sigma \cdot (k_2 + q_2)_\mu \cdot (p_2 + q_2)_\nu$ tritt aber $sp_2(\xi, \mu, \nu)$ von (17). (Man vergleiche dazu auch (17) und (18); für das dortige $sp_1(\xi, \mu, \nu)$ ist die Spur aus (5.27) einzusetzen.) Die Spur sp_1 enthält γ^5 mit maximal 10 γ -Matrizen, zu summieren ist mit sp_2 , einem 15-gliedrigen Ausdruck. Eine zusätzliche Schwierigkeit bringt die Verschiedenheit von $F_1(q^2)$ und $F_2(q^2)$, so daß man die Auswertung wohl nur mehr auf einer Rechenmaschine wird durchführen können. Wegen der Vielzahl der laufenden Indizes dürfte aber die Programmierung geraume Zeit beanspruchen.

*

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. F. Bopp möchte ich auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank aussprechen. Herrn Privatdozent Dr. H. J. Meister bin ich für viele, ausgedehnte Diskussionen zu herzlichem Dank verpflichtet; auch manche Hilfe und Anregung der Institutskollegen, vor allem von Dr. Siegmann und Herrn Lagally habe ich zu erwähnen.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Unterstützung dieser Arbeit und dem Institut für Plasmaphysik in Garching für die Möglichkeit, die numerischen Rechnungen auf der IBM 7090 durchzuführen.

Anhang A. Motteffekt am äußeren Feld.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit interessiert uns der Motteffekt bei hohen Energien, wir haben deshalb den Effekt grundsätzlich als Zweiteilchenstreuung betrachtet. Der Vollständigkeit halber möchten wir noch die Rechnung am äußeren Feld anschließen, die gegenüber den Formeln der Zweiteilchenstreuung nur eine Näherung (Targetmasse $M_2 \rightarrow \infty$) darstellt.

Bereits 1933 wurde von F.Sauter (Sauter 1933) der Motteffekt im Rahmen der Bornschen Näherung bei der Streuung eines Elektronenstrahles an einer statischen Ladung berechnet. Wir schließen in unserer Rechnung ein äußeres magnetisches Moment mit ein. Da der Motteffekt per definitionem die Asymmetrie am unpolarisierten Target ist, haben wir über $\vec{\tau}$ zu mitteln, denn nur auf diese Weise gibt es keine Vorzugsrichtungen des Targets. (Wäre das Target polarisiert, gäbe es bereits in der 1. Bornschen Näherung einen Asymmetrieeffekt.)

A.1 Die Matrixelemente.

Zunächst benötigen wir die von der Ladung Ze und dem magnetischen Moment $\vec{\tau}$ erzeugten Viererpotentiale

$$(A.1) \quad A^0 = \frac{Ze}{4\pi r} \quad \vec{A} = \nabla \times \frac{\vec{\tau}}{4\pi r}$$

In den Matrixelementen treten die Fouriertransformierten auf:

$$(A.2) \quad \tilde{A}_\mu(Q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int A_\mu(x) e^{iQx} d^4x$$

Es ist

$$(A.3) \quad \tilde{A}^0(Q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(Q_0) \frac{Ze}{Q^2}$$

$$(A.4) \quad \tilde{\vec{A}}(Q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(Q_0) \frac{Ze i}{Q^2} \left[\vec{Q} \times \frac{\vec{\tau}}{Ze} \right]$$

Aus den Feynmanregeln im Impulsraum erhalten wir, wenn wir noch die δ -Funktion, die die Erhaltung der Energie angibt, abspalten (ohne Struktur):

$$(A.5) \quad N_1(k, p) = \frac{Ze}{(2\pi)^2} \frac{m}{E} \bar{u}(k) \left\{ \gamma^0 + i \left[(\vec{k} - \vec{p}) \times \frac{\vec{\tau}}{Ze} \right] \cdot \vec{\gamma} \right\} u(p) \frac{1}{(\vec{k} - \vec{p})^2}$$

Um den allein beitragenden reellen Anteil des Matrixelementes zweiter Näherung abzuleiten, haben wir genau wie im Fall der Zweiteilchenstreuung zwei Methoden zur Verfügung.

Das allgemeine Matrixelement 2. Ordnung erscheint hier nicht als Integral $\int d^3q \int d^3\bar{q}$, sondern nur als Integral $\int d^3q$; der physikalische Grund liegt darin, daß bei einer Wechselwirkung mit einem statischen Feld prinzipiell kein Energieaustausch stattfindet. Anders als im Zweiteilchenfall trägt hier der Imaginärteil des Integrals

$$(A.6) \quad \int \frac{|\vec{q}|^2 d|\vec{q}| d\Omega_q}{[\vec{q}^2 - p^2 - i\epsilon][(\vec{p} - \vec{q})^2 - i\epsilon][(\vec{k} - \vec{q})^2 - i\epsilon]}$$

allein zum reellen Anteil des Matrixelementes bei. Ein Vergleich mit dem Integral (2.3) bei der Zweiteilchenstreuung zeigt, daß dort (selbstverständlich) noch ein zusätzlicher Faktor im Nenner vorhanden ist, der der inneren Linie des Targetteilchens entspricht. Sonst stimmen die Ausdrücke überein, wenn man berücksichtigt, daß im vorliegenden Fall kein Energieübertrag stattfindet.

Im Integral (6) läßt sich die Integration über den Impulsbetrag $|\vec{q}| = q$ ausführen, man erkennt, daß zum gesuchten Imaginärteil gerade der Pol bei $q = p + \frac{i\epsilon}{p}$ in der komplexen q -Ebene beiträgt. Anders als im Zweiteilchenfall ist hier nicht das Zusammenfallen zweier Pole notwendig (einfach weil es hier keine komplexe q^0 -Ebene (Energieebene) gibt). Physikalisch aber bedeutet hier der eine Pol in der q -Ebene genau das gleiche wie im Falle der Zweiteilchenstreuung das Zusammenfallen zweier Pole, nämlich einen reellen Zwischenzustand.

Ebenso können wir die allgemeine Formel verwenden, die unmittelbar aus der Unitarität der S-Matrix folgte

$$(A.7) \quad \text{Re } N_2 \eta \eta' (k, p) = \frac{1}{2} \int d^3q \delta(E_f - E_{zw}) \sum_{\eta''} N_1 \eta \eta'' (k, q) N_1 \eta'' \eta' (q, p)$$

wobei E_f die Energie im Endzustand, E_{zw} die Energie im Zwischenzustand bedeutet. Die Integration über den Impulsbetrag liefert hier

$$(A.8) \quad \int d^3q \delta(E_f - E_{zw}) = |\vec{E}| p \int d\Omega_q$$

so daß gilt

$$(A.9) \quad \text{Re } N_{2\eta\eta'}(k, p) = \frac{|E|p}{2} \int d\Omega_q N_{1\eta\eta''}(k, q) N_{1\eta''\eta'}(q, p)$$

(9) entspricht genau der Formel (2.27) für den Zweiteilchenfall. Weil bei der Streuung am statischen Feld die Masse des Targets unendlich groß ist, haben wir dort nur den Übergang $E_2 \rightarrow \infty$ zu vollziehen, um (9) zu erhalten.

Analog gilt (2.29) ebenfalls für $E_2 \rightarrow \infty$

$$(A.10) \quad a_y(k, p) = -|E|p \int d\Omega_q \gamma_p [\gamma^5 \gamma^2 P(p) M_1(p, k) P(k) M_1(k, q) P(q) M_1(q, p)]$$

A.2 Die Asymmetriegröße.

Die gesuchte Asymmetriegröße

$$(A.11) \quad A = \frac{a_y(k, p)}{a(k, p)}$$

erhalten wir in den Kapiteln 5 und 6 aus

$$(A.12) \quad a(k, p) = \gamma_p [P(k) M_1(k, p) P(p) \bar{M}_1(k, p)]$$

und $a_y(k, p)$ nach (A.10). Man kann auch wieder $a_y(k, p)$ durch (1.40) darstellen und das Matrixelement 1. Bornscher Näherung (5) und den Realteil des Matrixelementes 2. Bornscher Näherung (9) einsetzen.

Es ist nach (12)

$$(A.13) \quad a(k, p) = \frac{1}{m^2} \left\{ \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{E} \right\}^2 \frac{1}{(\vec{p}_0 - \vec{k}_0)^2} \cdot \frac{K}{2}$$

$$(A.14) \quad K = \frac{1}{2} \gamma_p [(\hat{k} + i m_1) \{ \gamma^0 + i [(\vec{k} - \vec{p}) \times \frac{\vec{\tau}}{2e}] \} \vec{\gamma} \{ (\hat{p} + i m_1) \{ \gamma^0 + i [(\vec{p} - \vec{k}) \times \frac{\vec{\tau}}{2e}] \} \vec{\gamma} \}]$$

(13) und (14) sind das Analogon zu (4) und (4a) von Kapitel 5 und 6. Dort erhalten wir in den Formeln (4a) einen Faktor $2E_2^2$ zusätzlich, der in Formel (4) durch zusätzlich $\frac{1}{2E_2^2}$ kompensiert wird. (Bei der Streuung am statischen Feld wäre $E_2 \rightarrow \infty$.)

Wenn man über $\vec{\tau}$ mittelt und $\tau_x^2 = \tau_y^2 = \tau_z^2 = \left(\frac{2ek}{2M}\right)^2$ setzt ($\kappa = 1$ würde einem "normalen" magnetischen Moment entsprechen), liefert die Auswertung

$$(A.15) \quad K = 4 \left[(p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2) + \frac{p^2 \kappa^2}{4M^2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 2p^2 \kappa^2 \frac{q^2}{4M^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$$

mit $q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ (Quadrat des Impulsübertrages). Für den Wirkungsquerschnitt gilt (Meister 1961 a)

$$(A.16) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^2 E^2 \cdot \frac{1}{2} a(k, p)$$

so daß

$$(A.17) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4p^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left\{ (p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2) + 4p^4 \left(\frac{\kappa}{2M}\right)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + 8p^4 \left(\frac{\kappa}{2M}\right)^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \right\}$$

(17) geht für $\kappa \rightarrow 0$ in die bekannte Formel der Coulombstreuung über.

Allgemein soll (17) die Streuung an einem Spin-1/2-Target darstellen. Übersichtlicher als der Vergleich mit (6.28) ist es, in (17) zur ultrarelativistischen Näherung überzugehen

$$(A.18) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{4p^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left\{ 1 + \frac{q^2}{4M^2} [2\kappa^2 \tan^2 \frac{\vartheta}{2} + \kappa^2] \right\}$$

und damit die in der gleichen Näherung gültige Rosenbluth-Formel zu vergleichen. Diese folgt aus (6.27) durch Übergang zum Laborsystem und lautet unter Vernachlässigung der kinematischen Korrektur und der Struktur

$$(A.19) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{4p^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left\{ 1 + \frac{q^2}{4M^2} [2(1+\kappa)^2 \tan^2 \frac{\vartheta}{2} + \kappa^2] \right\}$$

Unsere Formel (18) gibt also die Streuung am Pauli-Proton wieder mit dem wesentlichen Unterschied, daß bei der Streuung am statischen Feld nicht getrennt werden kann zwischen "gesamten" und "anomalen" magnetischen Moment.

Der Zähler der gesuchten Asymmetriegröße ist nach (6) und (14)

gegeben

$$(A.20) \quad Q_y(k, p) = \left\{ \frac{ze^2}{(2\pi)^4} \frac{m}{E} \right\}^3 \frac{pE}{8m^3} \int \frac{dQ_q}{(k-p)^2 (k-q)^2 (p-q)^2} \cdot L$$

$$(A.21) \quad L = \gamma_p \left[\gamma^5 \gamma^2 (-i \hat{p} + m) \right] \gamma^0 + i \left[(\vec{p} - \vec{k}) \times \frac{\vec{\tau}}{ze} \right] \vec{\gamma} \left\{ (-i \hat{k} + m) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \gamma^0 + i \left[(\vec{k} - \vec{q}) \times \frac{\vec{\tau}}{ze} \right] \vec{\gamma} \right\} (-i \hat{q} + m) \gamma^0 + i \left[(\vec{q} - \vec{p}) \times \frac{\vec{\tau}}{ze} \right] \vec{\gamma} \right\} \right]$$

(20) und (21) sind wieder das Analogon der entsprechenden Ausdrücke für die Zweiteilchenstreuung; (5.7) und (5.7a) für Spin-0-Target, (6.7) und (6.7a) für Spin-1/2-Target. Dort ist wieder L mit einem zusätzlichen Faktor E_2^3 definiert, der durch den zusätzlichen Faktor $(\frac{1}{E_2})^3$ in $a_y(k, p)$ kompensiert wird.

Bei der Auswertung von (21) nehmen wir nur solche Terme mit, die bei der Mittelung über die Komponenten des magnetischen Momentes τ_x, τ_y und τ_z einen Beitrag liefern. Es sind das die Quadrate

$$(A.22) \quad \bar{\tau}_x^2 = \bar{\tau}_y^2 = \bar{\tau}_z^2 = \left(\frac{ze\kappa}{2M} \right)^2$$

Es ergibt sich

$$(A.23) \quad L = 4m_1 \left\{ \bar{f}_1(\vartheta) + \left(\frac{\kappa}{2M} \right)^2 \cdot 4 \vec{k} \vec{q} \cdot \vec{f}_1(\vartheta) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\kappa}{2M} \right)^2 p^2 \left[8 \bar{f}_1(\vartheta) + 4 \bar{f}_2(\vartheta) + 4 \bar{f}_3(\vartheta) + \bar{f}_4(\vartheta) \right] \right\}$$

Dieser Ausdruck ist nun mit L_0 und $L_{\frac{1}{2}}$ der Zweiteilchenstreuung zu vergleichen. Vernachlässigt man in L_0 die Größe E_1 gegenüber E_2 , so ergibt sich

$$(A.24) \quad L_0 = 4m_1 M_2^2 E_2 \bar{f}_1(\vartheta)$$

Das ist, wie es sein muß, vom Definitionsfaktor E_2^3 abgesehen, unsere Formel (23), wenn man mit dem Moment $\kappa \rightarrow 0$ geht.

Betrachten wir nunmehr $L_{\frac{1}{2}}$ von (6.8), d.h. den Fall eines Spin-1/2-Targets ohne anomales Moment, so sehen wir, daß für $E_1 \ll E_2$ gilt:

$$(A.25) \quad 4m_1 \{ E_2 M_2^2 \bar{f}_1(\vartheta) + 4kq E_2 \bar{f}_1(\vartheta) - E_2 p^2 [2\bar{f}_1(\vartheta) + \bar{f}_2(\vartheta)] \}$$

Es stimmen also für $\kappa = 1$ die vier ersten Glieder von (23) genau mit (25) überein. Die beiden letzten Glieder mögen vom Unterschied in der Spinbeschreibung in den beiden Fällen herrühren. Daraus folgt, daß die Simulierung eines Targetteilchens durch ein äußeres Feld zur Beschreibung der feineren Details der Mottasymmetrie ungeeignet ist. Das schien von Anfang an plausibel.

Ohne daß wir eine Auswertung oder Diskussion der Formel vornehmen wollen, notieren wir die Asymmetrie, die sich für punktförmige Teilchen aus (23) ergibt:

$$(A.26) \quad A = - \frac{2Z\alpha mp \sin^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta}{2} \lg \frac{\vartheta}{2} \left\{ \ln \sin \frac{\vartheta}{2} + \frac{\kappa^2 p^2}{2M^2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - 3\kappa^2 \frac{p^2}{M^2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} - \frac{\kappa^2 p^2}{2M^2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2} \right\}}{\left\{ (p^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + m^2) + p^2 q^2 \frac{\kappa^2}{4M^2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 2p^2 q^2 \frac{\kappa^2}{4M^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right\}}$$

Für $\kappa = 0$ folgt der bekannte Ausdruck (Sauter 1933)

$$(A.27) \quad A = - \frac{2Z\alpha mp \sin^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta}{2} \lg \frac{\vartheta}{2} \ln \sin \frac{\vartheta}{2}}{E^2 \left(\cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{m^2}{E^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)}$$

Anhang B. Die Messung der Mottasymmetrie.¹⁾

Wie der Wirkungsquerschnitt nimmt auch die Mottasymmetrie beim Übergang zu höheren Energien immer mehr ab; der Wirkungsquerschnitt wie $\frac{1}{p^2}$, die Mottasymmetrie wenigstens nur wie $\frac{m_1}{p}$. Es gibt also in Bereichen, wo die Kernstruktur eine Rolle spielt, i.a. nur einen sehr kleinen Effekt, etwa in der Größenordnung von 10^{-4} . Es könnte scheinen, als hätte man zur Messung der Asymmetrie den Wirkungsquerschnitt auf 10^{-4} genau zu bestimmen, was praktisch unerreichbar sein würde. Tatsächlich ist aber natürlich der Motteffekt in einer Differenzmessung zugänglich, die eine wesentlich höhere Genauigkeit ermöglicht. Im Bereich niederer Energien wäre die Messung der Mottasymmetrie sogar in einer konventionellen Kompensationsmethode durchführbar. Die Differenz der Elektronenzahlen in den als Faradaysche Käfige ausgebildeten Zählern ließe sich dann unmittelbar und sehr genau ($\sim 10^{-5}$) als Spannungsdifferenz messen.

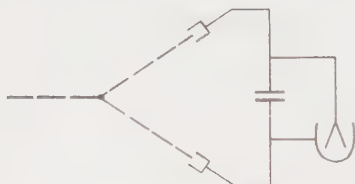


Abb. 24. Prinzipschaltung für eine Messung des Motteffektes. Lädt sich der Kondensator mit der Zeit auf, so ist eine Asymmetrie vorhanden. (Je nach Vorzeichen der Aufladung hat man rechts oder links mehr Elektronen.)

Bei den vorliegenden hohen Energien (kleine Intensitäten) hat man die Anordnung so auszuführen, daß die beiden Zähler starr miteinander verbunden und um eine Achse drehbar sind; als Achse ist dabei die Richtung des ankommenden Elektronenstrahles zu nehmen. Die Messung besteht dann darin, durch geeignete Verstärkung die Anzahl der gestreuten Elektronen durch Nachweis jedes einzelnen Elektrons zu registrieren; durch häufiges Kippen der Apparatur um 180° um die Drehachse und häufiges Umpolen der Polarisierung der Primärelektronen erreicht man im Prinzip wieder eine Differenzmessung.

Sämtliche Effekte, die beide "Linien" parallel verschieben, fallen bei der Messung heraus. Dazu gehören etwa der Wirkungsgrad der Detektoren, der Untergrund (Nulleffekt) und der Raumwinkel, der von den

¹⁾

Man vergleiche hierzu auch L.A. Page 1959

Zählern erfaßt wird (wirksames Zählervolumen, Geometrie der Blenden). Durch Vertauschen der beiden Zähler fallen weiterhin alle Effekte heraus, die auf einer Ungleichheit der Detektoren, ihres Nulleffektes, auf einer Verschiedenheit des erfaßten Raumwinkels usw. beruhen.

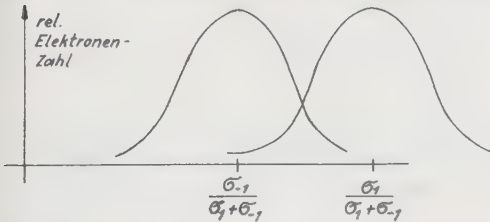


Abb. 25. Der Effekt ist dann noch meßbar, wenn der Abstand der Maxima größer ist als die Halbwertsbreite.

(Ein klassisches Beispiel, daß eine Relativmessung leichter durchzuführen ist als eine Absolutmessung, ist die Spektralanalyse. Wenn der Spektralapparat durch eine bekannte Linie geeicht werden kann, braucht lediglich die Differenz dieser Linie zu der zu messenden nachweisbar sein.)

Die Halbwertsbreite ist durch den mittleren (relativen) Fehler der Einzelmessung f (Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählers) und die Zahl der zum Nachweis kommenden Elektronen gegeben und lautet (bis auf einen unerheblichen Zahlenfaktor der Größenordnung 1):

$$(B.1) \quad h = \frac{f}{\sqrt{n}}$$

Die Mottasymmetrie ist dann gerade noch meßbar, wenn die Größe des Effektes A die Größe von h erreicht; als "Güte" des Experimentes definieren wir also

$$(B.2) \quad G = \frac{A}{h}$$

Je größer G , desto leichter ist die Asymmetrie nachweisbar; auf alle Fälle muß $G > 1$ sein.

Die im Zähler zum Nachweis gelangende Elektronenzahl n ist gegeben durch

$$(B.3) \quad n = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \varrho \frac{L}{M} \delta d \cdot F \cdot J \cdot t$$

(Dabei ist $\Delta\Omega$ die Winkelöffnung des Zählers, L die Loschmidtsche Zahl, ϱ die Dichte, M das Atomgewicht, F die Fläche, δd die Dicke des Targets, J die Intensität des Primärstrahles (Teilchen pro Zeiteinheit) und t die Nachweisdauer.) Es folgt für G :

$$(B.4) \quad G = A \cdot \sqrt{\frac{d\sigma}{d\Omega}} \frac{1}{f} \sqrt{\Delta\Omega \varrho \frac{L}{M} \delta d \cdot F \cdot J \cdot t}$$

Da die Größen f , $\Delta\Omega$ etc. von der Zählapparatur bzw. der Versuchsanordnung abhängen, über die wir im Rahmen dieser Arbeit keine weiteren Angaben machen können, haben wir uns damit begnügt, die Abhängigkeit der "Güte des Experimentes" von den theoretisch berechenbaren Größen Wirkungsquerschnitt und Mottasymmetrie anzugeben.

$$(B.5) \quad G \sim A \cdot \sqrt{\frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

Die Werte von G haben wir für die verschiedenen Fälle in unserem Rechenprogramm an der IBM 7090 ausgerechnet. Es zeigt sich etwa, daß die Winkel, bei denen die scharfen Maxima bei der Streuung an Spin-0-Targets auftreten, keineswegs für die Messung die geeignetsten sind, sondern daß G mit zunehmendem Streuwinkel leicht abnimmt.

Da größenordnungsmäßig sowohl A wie auch die Wurzel aus dem Wirkungsquerschnitt mit zunehmender Energie wie $\frac{1}{p}$ abnehmen, gilt für G in grober Näherung

$$(B.6) \quad G \sim \frac{1}{p^2}$$

Die genaue Abhängigkeit läßt sich aus der von uns durchgeführten numerischen Auswertung von (5) ersehen. Der Gang von G mit der Ordnungszahl Z läßt sich auf ähnliche Weise leicht angeben zu

$$(B.7) \quad G \sim Z^2$$

Man wird also mit wesentlichem Vorteil die Mottasymmetrie bei Targets mit hohen Kernladungszahlen messen. Für größere Z wird allerdings die Abhängigkeit schwächer als quadratisch, da hier - wie mehrfach erwähnt - die Bornsche Näherung nicht mehr sehr gut ist.

Anhang C. Auswertung der Ergebnisse.

Vor allem um die Summation und Integration der Spuren bequem ausführen zu können, sind wir in ein spezielles Koordinatensystem übergegangen. Während in unsere Endformeln der Mottasymmetrie, wie es sein muß, die spezielle Wahl des Achsenkreuzes nicht mehr eingeht, beziehen sich die kinematischen Größen, wie Impuls und Streuwinkel auf das Schwerpunktsystem. Da die Umrechnung der Winkel auf das Laborsystem nur unter bestimmten Voraussetzungen (etwa in der ultrarelativistischen Näherung für das einfallende Elektron) zu einfachen Formeln führt, lassen wir im allgemeinen die Schwerpunktgrößen in den Ergebnissen stehen.

Den Übergang vom Laborsystem zum Schwerpunktsystem vermittelt eine Lorentztransformation. Die relative Geschwindigkeit zwischen beiden Systemen erhält man sofort aus ihrer Definition. Denn es ist die Geschwindigkeit des Teilchens 2 im Schwerpunktsystem gleich der Relativgeschwindigkeit zwischen den Systemen:

$$(C.1) \quad \beta = \frac{p}{E_2} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_2}{M_2}$$

Die kinematischen Größen im Laborsystem (die wir durch einen Strich andeuten) erhalten wir aus den Schwerpunktgrößen durch eine Lorentztransformation. Während die Energien im Schwerpunktsystem durch die Streuung unverändert bleiben, müssen wir im Laborsystem die Größen nach der Streuung durch einen zusätzlichen Querstrich unterscheiden.

$$(C.2) \quad E_1' = \frac{E_1 E_2 + p^2}{M_2} \quad ; \quad E_2' = M_2$$

$$(C.3) \quad \bar{E}_1' = \frac{E_1 E_2 + p^2 \cos \vartheta}{M_2} \quad ; \quad \bar{E}_2' = \frac{E_2^2 - p^2 \cos \vartheta}{M_2}$$

Ebenso sind im Schwerpunktsystem die Streuwinkel von Elektron und Targetteilchen gleich, im Laborsystem haben wir für das Elektron

$$(C.4) \quad \tan \vartheta_1' = \frac{M_2 \sin \vartheta}{(E_2 \cos \vartheta + E_1)}$$

und für das Targetteilchen

$$(C.5) \quad \tan \vartheta'_2 = \frac{M_2}{E_2} \tan \vartheta_2$$

Der Wirkungsquerschnitt im Laborsystem ist ($M_2 > m_1$ vorausgesetzt)

$$(C.6) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' = \frac{[(E_2 \cos \vartheta + E_1)^2 + M_2^2 \sin^2 \vartheta]^{\frac{3}{2}}}{M_2^2 (E_2 + E_1 \cos \vartheta)} \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)$$

In den Formeln (2) bis (6) haben wir die kinematischen Größen durch die entsprechenden Größen im Schwerpunktsystem ausgedrückt. Aus den Massen der beteiligten Teilchen folgen sofort E_1 und E_2

$$(C.7) \quad E_1 = \sqrt{p^2 + m_1^2} \quad ; \quad E_2 = \sqrt{p^2 + M_2^2}$$

Als "Parameter" haben wir also den Schwerpunktimпульs p , den Streuwinkel ϑ und die Massen der beteiligten Teilchen zu betrachten.

An der elektronischen Rechenanlage IBM 7090 des Max-Planck-Institutes für Plasmaphysik in Garching führten wir die numerische Auswertung von einigen in dieser Arbeit angeführten Formeln für die Mottasymmetrie durch; wir errechneten daneben die kinematischen Größen, den Wirkungsquerschnitt im Laborsystem und die im Anhang B definierte relative "Güte des Experimentes."

Die umfangreichen Tabellen bilden einen (nicht zum Druck bestimmten) Anhang zu dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

- Akhiezer, A.J. (1958) JETP 6 (33), 588 (1958)
(Mit Rosentsveig u.Shmushkevich)
- Barut, A.O. (1960) Phys.Rev., 120, 1871 (1960)
(Mit C.Fronsdal)
- Berg, R.A. (1961) Nucl.Physics 26, 259 (1961)
(Mit C.Lindner)
- Blancensbecker, R. (1960) Annals of Physics 10, 62 (1960)
(Mit Goldberger,Khuri u.Treiman)
- Buon, J. (1963) Private Mitteilung
- Clementel, E. (1956) Nuovo Cim., 4, 1207 (1956)
(Mit C.Villi)
- Drell, S.D. (1959) Phys.Rev., 113, 741 (1959)
(Mit Fubini)
- Drell, S.D. (1961) Elektromagnetic Structure of the
(Mit F.Zachariasen) Nucleons, Oxford Univ.Press (1961)
- Eden, R.J. (1951) Proc.Roy.Soc.A 210, 388 (1951)
- Ernst, F.J. (1960) Phys.Rev., 119, 1105 (1960)
(Mit R.G.Sachs und K.C.Wali)
- Faissner, H. (1959) Erg.exakt.Naturw. 1959 S. 180
- Foldy, L.L. (1952) Phys.Rev., 87, 688 (1952)
- Friedmann, H. (1961) Sitz.Ber.Bayr.Akad.Wiss.1961, S.13
- Frolov, G.V. (1958) JETP 7(34), 764 (1958)
- Fronsdal, C. (1961) Phys.Rev., 121, 916 (1961)
(Mit B.Jaksić)
- Hamilton, J. (1959) The Theory of Elementary Particles,
Oxford 1959
- Hand, L.N. (1963) Rev.Mod.Phys. 35, 335 (1963)
(Mit Miller u.Wilson)
- Hofstadter, R. (1958) Rev.Mod.Phys. 30, 482 (1958)
(Mit F.Bumiller u.M.R.Yearian)
- Hofstadter, R. (1960) High-Energy Electron Scattering
(Mit R.Herman) Tables, Stanford Univ.Press 1960
- Hofstadter, R. (1961) Phys.Rev.Lett. 6, 293 (1961)
(Mit R.Herman)
- Hofstadter, R. (1962) Phys.Rev.Lett. 8, 381 (1962)
(Mit Vries u.Herman)
- Hückel, M. (1963) Diplomarbeit Inst.f.Theor.Physik
Univ.München
- Isaev, P.S. (1959) Nuovo Cim. 13, 1 (1959)
(Mit I.S.Zlatev)

- Khuri, N.N. (1957) Phys.Rev., 107, 1148 (1957)
- Mandelstam, S. (1959) Phys.Rev., 115, 1741 (1959)
- Meister, H.J. (1961a) Die kovariante Beschreibung der Polarisation etc., Blaudruck Inst.f.Theor.Physik Univ.München
- Meister, H.J. (1961b) Die elektromagn.Struktur des (Mit P.Merkel) Nukleons, Blaudruck Inst.f.Theor.Physik Univ.München
- Meister, H.J. (1962) Sitz.Ber.Bayr.Akad.Wiss.1962, S.85
- Merkel, P. (1962) Diplomarbeit Inst.f.Theor.Physik Univ.München
- Meyer, G. (1960) Z.f.Naturf. 15a, 548 (1960)
- Mott, N.F. (1929) Proc.Roy.Soc. A 124, 425 (1929)
- Mott, N.F. (1932) Proc.Roy.Soc. A 135, 429 (1932)
- Mott, N.F. (1949) The Theory of Atomic Collisions (Mit H.S.W.Massey) Oxford 1949 (2nd Ed.)
- Page, L.A. (1959) Rev.Mod.Phys. 31, 759 (1959)
- Raith, W. (1962) Zur Messung der Spinpolarisation von Elektronenstrahlen, Dissertation F.U.Berlin 1962
- Regge, T. (1959) Nuovo Cim. 14, 951 (1959)
- Rosenbluth, M.N. (1950) Phys.Rev., 79, 615 (1950)
- Salecker, H. (1959) Über den magn.Formfaktor des (Mit H.Eisenlohr) Nukleons, Blaudruck Inst.f.Theor.Physik Univ.Freiburg
- Salzman, G. (1955) Phys.Rev., 99, 973 (1955)
- Sauter, F. (1933) Ann.d.Phys. 18, 61 (1933)
- Schaaf, M. (1963) Diplomarbeit Inst.f.Theor.Physik Univ.München
- Schweber, S. (1961) An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Evanston 1961
- Sherman, N. (1959) Phys.Rev., 114, 1541 (1959) (Mit D.F.Nelson)
- Shull, S. (1943) Phys.Rev., 63, 29 (1943) (Mit Chase u.Meyers)
- Singer, P. (1954) Die Singularitäten infolge konfluenter Pole etc., Dissertation Univ.München 1954
- Tolhoek, H.A. (1951) Physica 17, 1 (1951) (Mit S.R.de Groot)
- Tsai, Y.S. (1960) Phys.Rev., 120, 269 (1960)

- Vachaspati, (1954) Phys.Rev., 93, 502 (1954)
- Werthamer, N.R. (1961) Phys.Rev., 123, 1005 (1961)
(Mit M.A.Ruderman)
- Yamagata, T.L. (1956) Bull.Am.Phys.Soc.Ser.II, 1, 350
(Mit Auerbach, Bernandini et al.) (1956)
- Yennie, D.R. (1957) Rev.Mod.Phys. 29, 144 (1957)
(Mit M.M.Lévy u.D.G.Ravenhall)

Lebenslauf

Am 17. Juni 1933 wurde ich als Sohn deutscher, sich vorübergehend in Amerika aufhaltender Eltern, des Elektroingenieurs Wilhelm Hermann und seiner Ehefrau Ella, geb. Erhard, in Vernon, British Columbia, Canada, geboren.

Nach dem Besuch der Volksschulen in Mannheim und Teplitz-Schönau, Sudetenland, trat ich 1943 in die Oberschule Teplitz-Schönau ein; nach der Ausweisung 1945 besuchte ich die Städt. Oberrealschule Miesbach Obb., wo ich 1951 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1951/52 begann ich das Studium der Physik an der Universität München und fertigte am Institut für Theoretische Physik unter der Leitung von Professor Dr. F. Bopp meine Diplomarbeit über das Thema "Tensorwellengleichungen im konformen Raum"; die Diplomprüfung legte ich 1957 ab.

Am 1. Mai 1957 trat ich in die theoretische Gruppe des deutschen Elektronen-Synchrotrons in Hamburg ein, wo ich mich vor allem mit der Theorie der Synchrotronschwingungen und der Rückwirkung des Elektronenstrahles auf das Beschleunigungssystem befaßte. Nach dreijähriger Tätigkeit kehrte ich nach München an das Institut für Theoretische Physik zurück, um mein Studium mit der Promotion abzuschließen; während dieser Zeit hat mich die Deutsche Forschungsgemeinschaft in dankenswerter Weise unterstützt. Seit dem 1. Okt. 1963 habe ich eine wissenschaftliche Assistentenstelle am neugegründeten "Institut für Geschichte der exakten Naturwissenschaften und der Technik" des Deutschen Museums inne.

Meine akademischen Lehrer waren F. Bopp (theoretische Physik), W. Gerlach und W. Rollwagen (Experimentalphysik), R. König und K. Seebach (Mathematik), E. Wiberg (Chemie) und F. Klemm, K. Vogel und H. Gericke (Geschichte der Naturwissenschaften und der Mathematik).

Armin Hermann

